

CĂN BẬC BA

- Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$.
- Mọi số a đều có duy nhất một căn bậc ba.
- $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$ • $\sqrt[3]{A \cdot B} = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}$ • Với $B \neq 0$ ta có: $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$

DẠNG 1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

Phương pháp: Áp dụng công thức: $\sqrt[3]{a^3} = a$; $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

và các hằng đẳng thức: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Bài 1. Thực hiện phép tính:

a) $\sqrt[3]{216}$

b) $\sqrt[3]{729}$

c) $\sqrt[3]{1331}$

d) $\sqrt[3]{-343}$

e) $\sqrt[3]{-1728}$

f) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

HD:

a) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$

b) $\sqrt[3]{729} = 9$

c) $\sqrt[3]{1331} = 11$

d) $\sqrt[3]{-343} = -7$

e) $\sqrt[3]{-1728} = -12$

f) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}$

b) $\sqrt[3]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$

c) $\sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216}$

d) $(\sqrt[3]{4}+1)^3 - (\sqrt[3]{4}-1)^3$

e) $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})$

HD:

a) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} = \sqrt{2}+1$

b) Tương tự câu a: $\sqrt{3}-1$

c) $-4 - 5 + 6 = -3$

d) Khai triển theo hằng đẳng thức:

$$(4 + 3\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{4} + 1) - (4 - 3\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{4} - 1) = 6\sqrt[3]{16} + 2 = 12\sqrt[3]{2} + 2$$

e) $\sqrt[3]{3^3} + \sqrt[3]{2^3} = 5$

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

b) $B = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

$$c) C = (2 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}$$

$$d) D = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$$

HD:

$$a) \text{ Nhân vào 2 vế với 2 ta được: } 2A = \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(\sqrt{5} + 1)^3} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{5})^3} = 2$$

Suy ra $A = 1$.

$$\text{Cách khác: Lập phương hai vế ta được: } A^3 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow A^3 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} \cdot (\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}})$$

$$\Leftrightarrow A^3 = 4 + 3\sqrt{-1} \cdot A \Leftrightarrow A^3 + 3A - 4 = 0 \Leftrightarrow (A - 1)(A^2 + A + 4) = 0 \Leftrightarrow A = 1$$

$$b) \text{ Tương tự câu a: } B = 3. \text{ Chú ý: } 9 \pm 4\sqrt{5} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3$$

$$c) C = 1. \text{ Chú ý: } 26 + 15\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^3$$

$$d) D = 1. \text{ Đặt } a = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}, b = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} \Rightarrow a^3 - b^3 = 6, ab = \frac{5}{3}. \text{ Tính } D^3.$$

$$\text{Bài 4. Cho } \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{-54} + \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2} \cdot a. \text{ Tính } a$$

HD:

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{-54} + \sqrt[3]{128} = 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}. \text{ Vậy } a = 3.$$

$$\text{Bài 5. Cho } a^3 = 5 \cdot \sqrt[3]{2} - 1 - 3 \cdot \sqrt[3]{4}. \text{ Tính } a$$

HD:

$$2 \cdot \sqrt[3]{2} - 3 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot 1 + 3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 1^2 - 1 = \sqrt[3]{2} - 1 \text{ suy ra } a = \sqrt[3]{2} - 1$$

$$\text{Bài 6. Biết } \overline{(1 + \sqrt{3})^2} + \overline{(1 - \sqrt{3})^2} = x + y\sqrt{3} \text{ với } x, y \text{ là các số nguyên. Tính } x + y$$

HD:

$$\overline{1 + \sqrt{3}}^2 + \overline{1 - \sqrt{3}}^2 = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 2\sqrt{3} \text{ suy ra } x = 0; y = 2 \text{ nên } x + y = 2.$$

Bài 7. Tính giá trị biểu thức $A = (3x^3 + 8x^2 + 2)^{2009} - 3^{2009}$ biết $x = \frac{(\sqrt{5}+2)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$

HD:

Chú ý: $\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} = \sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3} = \sqrt{5}-2$; $\sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = 3-\sqrt{5}$

nên $x = \frac{1}{3} \Rightarrow A = 0$

Bài 8. Tính: $A = \frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{4+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}}$; $B = \sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$; $C = \frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}$

HD:

$$A = \frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{4+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{4+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+2\sqrt{3}})}{\sqrt[3]{4+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{2}$$

Chú ý: $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow B = \sqrt{3} + 1$

$$C = \frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} + 1$$

Bài 9. Tính: $A = \sqrt[3]{1 + 2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{25 + 4\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{6} - 1} + 1$

HD:

Ta có: $(1 + 2\sqrt{6})^2 = 25 + 4\sqrt{6}$ nên $\sqrt[3]{1 + 2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{25 + 4\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{6} - 1} + 1 = 0 \Rightarrow A = 1$

Bài 10. Tính: $A = \frac{\sqrt[3]{7+2\sqrt{5}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$

HD:

$$A = \frac{\sqrt[3]{7+2\sqrt{5}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}}{(1+\sqrt{3})-\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{2}$$

Bài 11. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt[3]{\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}+3\sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt{3}}{3+\sqrt[6]{108}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

HD:

$$\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{3} \cdot \frac{(\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} = \sqrt{3}(3 + \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = 3\sqrt{3} + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4}$$

$$\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9+6\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}} = (3 + \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2})^2 = 3 + \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3 + \sqrt[6]{108}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}}{3 + \sqrt[6]{108}} = 1.$$

Đặt $A = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. Lập phương hai vế tính được $A = 1$.

Vậy VT=VP = 1

Bài 12. Tính:

a) $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$

b) $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[4]{56-24\sqrt{5}}$

d) $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}} + 1$

e) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$

HD:

a) $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{(\sqrt{5}+2)^2} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$

$= \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = 2 \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = -2$

b) $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$

c) $\sqrt[4]{56-24\sqrt{5}} = \sqrt[4]{(6-2\sqrt{5})^2} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$

d) $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}} = \sqrt[4]{(4-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$

e) $\sqrt[3]{2+1} + \sqrt[3]{1-\sqrt{2}} = 2$

Bài 13. Tính các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$

b) $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$

c) $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$

d) $\sqrt[3]{2+10\frac{1}{27}} + \sqrt[3]{2-10\frac{1}{27}}$

e) $\sqrt[3]{4+\frac{5}{3}\frac{31}{3}} + \sqrt[3]{4-\frac{5}{3}\frac{31}{3}}$

HD: Lập phương hai vế.

a) 2

b) 1

c) 6

d) 2

e) 1

Bài 14. Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{16+3}\sqrt[3]{12+3}\sqrt[3]{9}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[4]{2+4}\sqrt[4]{4+4}\sqrt[4]{8+4}\sqrt[4]{16}}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{9-3}\sqrt[3]{6+3}\sqrt[3]{4}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{9-3}\sqrt[3]{3+3}\sqrt[3]{24-3}\sqrt[3]{243+3}\sqrt[3]{375}}$

HD: Sử dụng HĐT: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$$a) \frac{1}{\sqrt[3]{16+3}\sqrt[3]{12+3}\sqrt[3]{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4+3}\sqrt[3]{3}}^2 = \frac{\sqrt[3]{16+3}\sqrt[3]{9-3}\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4+3}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{16+3}\sqrt[3]{9-3}\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3}}^2 = \frac{\sqrt[3]{16+3}\sqrt[3]{9-3}\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3}}{7}^2$$

Bài 15. Cho $0 < a \neq 1$. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \sqrt{6-4\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} : \frac{a-1}{2(\sqrt{a}-1)} - 1$$

HD:

$$A = (2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) + (\sqrt{a}-1) : \frac{a-2\sqrt{a}+1}{2(\sqrt{a}-1)} = 4$$

Bài 16. Tính giá trị biểu thức:

a) $P = \frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}(3x+1)+x^2(3+x)}}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x}$ với $x = 2018$

b) $M = \sqrt[4]{x} - 2\sqrt[8]{x} + 1$ với $x = 256$

HD:

$$a) P = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{x})^3+3(\sqrt{x})^2 \cdot x+3\sqrt{x} \cdot x^2+x^3}}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} = 0$$

$$b) M = (\sqrt[8]{x} - 1)^2 + 1 = \sqrt[8]{x}$$

Bài 17. Cho hai số a, b:

$$a) a = \sqrt[3]{3 + \frac{368}{27}} + \sqrt[3]{3 - \frac{368}{27}} ; b = \frac{1}{2} \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

Tính giá trị biểu thức : $P = 2a^{100} + b^3$

$$b) a = \frac{1}{\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{15}} ; b = \frac{1}{3} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{25+\sqrt{621}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{25-\sqrt{621}}{2}} \right)$$

Tính giá trị của biểu thức: $P = a^3 + b^3 - 3a - b^2 + 100$

HD:

$$a) a^3 = 3 + \sqrt[3]{\frac{368}{27}} + 3 - \sqrt[3]{\frac{368}{27}} + 3a \cdot \sqrt[3]{\left(3 + \sqrt[3]{\frac{368}{27}}\right)\left(3 - \sqrt[3]{\frac{368}{27}}\right)} = 6 - 5a \text{ suy ra } (a-1)(a^2+a+6)$$

=0 nên a=1.

$$b = \frac{1}{2} \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{2}}^3 = 2 \text{ suy ra } P = 10.$$

b) Tương tự câu a các em lập phương lên : $a^3 = 3a+8 \Leftrightarrow a^3-3a = 8$

$$1 - 3b = \sqrt[3]{\frac{25+\sqrt{621}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{25-\sqrt{621}}{2}} \text{ suy ra } (1-3b)^3 = 25+3(1-3b) \Leftrightarrow b^3-b^2 = -1.$$

$$\text{Nên } P = a^3-3a+b^3-b^2+100=107$$

Bài 18. Cho $x = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}$; $y = \sqrt[3]{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17 - 12\sqrt{2}}$.

Tính giá trị biểu thức sau: $P = x^3 + y^3 - 3(x + y) + 2004$

HD: Lập phương hai vế x và y ta được:

$$\begin{cases} x^3 = 3x + 6 \\ y^3 = 3y + 34 \end{cases} \text{ suy ra } x^3 + y^3 = 3(x + y) + 40 \Leftrightarrow x^3 + y^3 - 3(x + y) = 40$$

$$\Rightarrow P = 40 + 2004 = 2044$$

Bài 19. Cho $a = \frac{2 - (\sqrt{5}+2) \cdot \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$. Tính giá trị biểu thức: $P = (a^{11} - a^{10} + a^9 - a^8 + a^{20} + 99$

HD:

$$a = \frac{2 - (\sqrt{5} + 2) \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}^3}{(\sqrt{3} + 1)^2 - \sqrt{3}} = \frac{2 - (\sqrt{5} + 2) \cdot (\sqrt{5} - 2)}{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}} = 1$$

suy ra P = 100.

Bài 20. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} \quad b) B = \frac{a + \sqrt{2 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}}$$

HD:

$$a) \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 2\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 2$$

$$b) B = \frac{a+1}{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{a^2+\sqrt{a}}^3} = \frac{a+1}{-1 - \sqrt[3]{a^2+\sqrt{a}}^3} = \frac{\sqrt[3]{a^3+1^3}}{-\sqrt[3]{a^2+\sqrt{a}}^3} = \frac{\sqrt[3]{a+1} \cdot \sqrt[3]{a^2+\sqrt{a}}^3}{-\sqrt[3]{a^2+\sqrt{a}}^3} = -\sqrt[3]{a} - 1$$

Bài 21. Rút gọn biểu thức:

$$a) A = \frac{\sqrt[3]{a^4+\sqrt[3]{a^2b^2+\sqrt[3]{b^4}}}}{\sqrt[3]{a^2+\sqrt[3]{ab+\sqrt[3]{b^2}}}}$$

$$b) B = \frac{a\sqrt[3]{a}-2a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2-\sqrt[3]{ab}}^3} + \frac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a-\sqrt[3]{b}}^3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$$

HD:

$$a) \text{ Đặt } \sqrt[3]{a} = x; \sqrt[3]{b} = y \text{ suy ra: } A = \frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2+xy+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^2-x^2y^2}{x^2+xy+y^2} = \frac{(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2} = x^2 - xy + y^2 \\ = \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$$

b) Tương tự câu a, B = 1.

Bài 22. Cho biểu thức: $x = \frac{4\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}+1)}$. Tính giá trị biểu thức: $A = (x^5 - 7x^2 - 3100 + 199)$

HD: $x = 2 \Rightarrow A = 200$

Bài 23. Cho biểu thức: $= \frac{x^5+x^4.\sqrt[3]{6}+x^3.\sqrt[3]{36}}{|x^3-3|-3}$. Rút gọn và Tính giá trị biểu thức tại $x = 2.\sqrt[3]{6}$

HD:

Xét $x^3 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3} \leq x \neq \sqrt[3]{6}$.

$$A = \frac{x^3(x^2+x.\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36})}{x^3-3-3} = \frac{x^3(x^2+x.\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36})}{x^3-6} = \frac{x^3(x^2+x.\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36})}{(x-\sqrt[3]{6})(x^2+x.\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36})} = \frac{x^3}{x-\sqrt[3]{6}} \quad (1)$$

Xét $x^3 - 3 < 0 \Leftrightarrow 0 \neq x < \sqrt[3]{3}$

$$A = \frac{x^3(x^2+x.\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36})}{3-x^3-3} = -(x^2+x.\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36}) \quad (2)$$

Thay $x = 2.\sqrt[3]{6} > \sqrt[3]{3}$ vào (1) suy ra $A = \frac{(2.\sqrt[3]{6})^3}{2.\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{6}} = \frac{48}{\sqrt[3]{6}} = 8.\sqrt[3]{36}$

Bài 24.

a) Cho $a > \frac{1}{8}$. Tính giá trị biểu thức sau: $D = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \cdot \frac{8a-1}{3}} - \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \cdot \frac{8a-1}{3}}$

b) Cho $b = \sqrt[3]{2020}$. Tính giá trị biểu thức: $C = \sqrt[3]{\frac{b^3 - 3b + (b^2 - 1)\sqrt{b^2 - 4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3 - 3b - (b^2 - 1)\sqrt{b^2 - 4}}{2}}$

HD:

a) Lập phương hai vế ta được:

$$D^3 = 2a + 3D \cdot \sqrt[3]{a^2 - \frac{a+1}{3}^2 \cdot \frac{8a-1}{3}} \Leftrightarrow D^3 = 2a + D(1 - 2a) \Leftrightarrow (D - 1)(D^2 + D + 2a) = 0$$

Vì $a > \frac{1}{8}$ nên $D^2 + D + 2a > 0$ suy ra $D = 1$.

b) Tương tự câu a. $C^3 = b^3 - 3b + 3C \Leftrightarrow (C - b)(C^2 + bC + b^2 - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} C = b = \sqrt[3]{2020} \\ C^2 + bC + b^2 - 3 = 0 \end{matrix}$$

Xét $C^2 + bC + b^2 - 3 = 0$. Ta có: $\Delta = 3(4 - b^2) = 3(4 - \sqrt[3]{2020}) < 0$. Vậy $C = \sqrt[3]{2020}$

DẠNG 2: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài 1. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} < 3$

HD:

Đặt $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = A$. Lập phương hai vế tính A rồi chỉ ra $A < 3$.

Bài 2. Chứng minh rằng: a) $(\sqrt[3]{2} + 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}} = 1$ b) $\frac{\sqrt[4]{5} + 1}{\sqrt[4]{5} - 1} = \sqrt[4]{\frac{3 + 2\sqrt[4]{5}}{3 - 2\sqrt[4]{5}}}$

HD:

a) Đặt $(\sqrt[3]{2} + 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}} = a$ suy ra $a^3 = (\sqrt[3]{2} + 1)^3 \cdot \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3} = [2 + 1 + 3\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} + 1)] \cdot \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3} =$

$= (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) \cdot (\sqrt[3]{2} - 1) = 1$ suy ra $a = 1$.

b) Đặt $\sqrt[4]{5} = a$ rồi khai triển hai vế. chú ý $a^4 = 5$

Bài 3. Chứng minh các biểu thức sau là một số nguyên.

a) $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{14\sqrt{2} - 20}$ b) $\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}}$ c) $\sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}}$

HD: Lập phương hai vế:

a) 4 b) 1 c) 5

Bài 4. Chứng minh các số sau là các số nguyên: $A = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}; B = \sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{48}}{9}} + \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{48}}{9}}$

HD:

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = 1 \end{aligned}$$

Lập phương hai vế của B để tính B.

Bài 5. Chứng tỏ rằng: $x = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ là nghiệm phương trình: $x^3 + 3x - 4 = 0$

HD:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \text{ suy ra } x^3 = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}^3 - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}^3 \\ \Leftrightarrow x^3 &= \sqrt{5}+2 - (\sqrt{5}-2) - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}^3 \\ \Leftrightarrow x^3 &= 4 - 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \end{aligned}$$

Bài 6. Cho $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}}} + 1$

a) Chứng minh rằng: $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$

b) Giả sử: $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. Tính $f(a)$.

HD:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}} &= 1 + 2\sqrt{5} \text{ nên } a = \sqrt{2} + \sqrt{5} \text{ suy ra } a^2 - 7 = 2\sqrt{10} \text{ nên } (a^2 - 7)^2 = 40 \\ \Leftrightarrow a^4 - 14a^2 + 9 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{b) } x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19 = (x^5 - 14x^3 + 9x) + 2(x^4 - 14x^2 + 9) + 1$$

Suy ra $f(a) = 1$

Bài 7. Đơn giản biểu thức sau: $A = \frac{x+1}{2^3 \sqrt{3-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{5+2\sqrt{6}+x+\frac{1}{x}}}$

HD:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 + x + \frac{1}{x}}} &= \frac{x+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2} + x + \frac{1}{x}}} \\ &= \frac{x+1}{2+x+\frac{1}{x}} = \frac{x+1}{\frac{(x+1)^2}{x}} = \frac{x}{x+1} \end{aligned}$$

Bài 8. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc x: $P = \sqrt{x} + \frac{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}-x}}{\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{5}+\sqrt{x}}}$

HD:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{x} + \frac{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}-x}}{\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{5}+\sqrt{x}}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{(2+\sqrt{3})^2 - x}}{\sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{5}+\sqrt{x}}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{3}-x}}{\sqrt{5}-2 \cdot \sqrt{2+\sqrt{5}+\sqrt{x}}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} = 1 \end{aligned}$$

Bài 9. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$A = \frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \left(2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}} \right) ; \quad x \neq \pm 8; x \neq 0$$

HD:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(2-\sqrt[3]{x})(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{2+\sqrt[3]{x}} : \frac{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}-2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+2)} \\ &= 2 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} = 2 \end{aligned}$$

Bài 10. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x, y ($xy \neq \pm\sqrt[3]{2}$)

$$P = \frac{2\sqrt[3]{2} \cdot xy}{x^2y^2 - \sqrt[3]{4}} + \frac{xy - \sqrt[3]{2}}{2xy + 2\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}}$$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Đặt } \sqrt[3]{2} &= a \text{ suy ra } P = \frac{2a \cdot xy}{x^2y^2 - a^2} + \frac{xy - a}{2xy + 2a} \cdot \frac{2xy}{xy + a} - \frac{xy}{xy - a} = \\ &= \frac{2axy}{(xy - a)(xy + a)} + \frac{xy - a}{2(xy + a)} \cdot \frac{2xy}{xy + a} - \frac{xy}{xy - a} \\ &= \frac{2axy + (xy - a)^2}{2(xy - a)(xy + a)} \cdot \frac{2xy}{xy + a} - \frac{xy}{xy - a} = \frac{(xy + a)^2}{2(xy - a)(xy + a)} \cdot \frac{2xy}{xy + a} - \frac{xy}{xy - a} \end{aligned}$$

$$= \frac{xy}{xy-a} - \frac{xy}{xy-a} = 0$$

Bài 11.

a) Cho hai số a và b thỏa mãn: $a = \frac{2}{2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4}}$; $b = \frac{6}{2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4}}$. Tính $A = ab^3 - a^3b$.

b) Chứng minh rằng: $x_0 = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ là nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + x - 20 = 0$

c) Chứng minh rằng: $x_0 = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + b^3}} - \sqrt[3]{a^2 + b^3 - a}$ là nghiệm của phương trình $x^3 + 3bx - 2a = 0$

d) Chứng minh rằng $x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ là nghiệm phương trình $x^3 - 3x - 18 = 0$

HD:

$$a) a = \frac{2}{2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4}} = \frac{2(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})(2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4})} = \frac{2(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{4})^3 - (\sqrt[3]{2})^3} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}.$$

$$\text{Tương tự } b = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}. A = ab(a-b)(a+b) = 8(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4})$$

$$b) x_0 = \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} = 4$$

$$c) x_0^3 = 2a - 3bx_0$$

$$d) x^3 = 9 + 4\sqrt{5} + 9 + 4\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = 18 + 3x$$

Bài 12. Cho $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b+c}$. Chứng minh rằng trong 3 số a, b, c luôn tồn tại hai số đối nhau.

HD:

$$\text{Lập phương hai vế giả thiết đưa về dạng: } \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{c} = 0$$

Bài 13. Cho biểu thức: $A = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}}$. Chứng minh: $\sqrt[3]{A^2} = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}$

HD:

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{x^2} = a; \sqrt[3]{y^2} = b \Rightarrow A = \sqrt{a^3 + a^2 b} + \sqrt{b^3 + a b^2} = (a+b) \cdot \sqrt{a+b} = \sqrt[3]{(a+b)^3}$$

$$\text{Suy ra } A^2 = (a+b)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{A^2} = a+b = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}$$

Bài 14. Chứng minh rằng, nếu: $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ thì

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

HD:

$$\text{Đặt } ax^3 = by^3 = cz^3 = t \Rightarrow a = \frac{t}{x^3}, b = \frac{t}{y^3}, c = \frac{t}{z^3}.$$

$$\text{Ta có: } \sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{\frac{t}{x^3} \cdot x^2 + \frac{t}{y^3} \cdot y^2 + \frac{t}{z^3} \cdot z^2} = \sqrt[3]{t \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = \sqrt[3]{t}$$

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{\frac{t}{x^3}} + \sqrt[3]{\frac{t}{y^3}} + \sqrt[3]{\frac{t}{z^3}} = \frac{\sqrt[3]{t}}{x} + \frac{\sqrt[3]{t}}{y} + \frac{\sqrt[3]{t}}{z} = \sqrt[3]{t} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \sqrt[3]{t}$$

$$\text{Vậy } VT = VP = \sqrt[3]{t}$$

Bài 15. Chứng minh đẳng thức:

$$x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \left[(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z})^2 + (\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x})^2 \right]$$

HD: Khai triển và rút gọn ta được về trái

Bài 16. Chứng minh rằng :

$$\text{Nếu } \sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} = 1 \text{ thì } \sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = 2$$

HD:

$$\text{Nhận xét: nếu } \sqrt[3]{a+1} = \sqrt[3]{a-1} \text{ thì } \sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = 0 \text{ (vô lí).}$$

$$\text{Vậy } \sqrt[3]{a+1} \neq \sqrt[3]{a-1}. \text{ Đặt } \sqrt[3]{a+1} = x; \sqrt[3]{a-1} = y \text{ suy ra } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x^3 - y^3 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } x - y = 2. \text{ Đpcm.}$$

DẠNG 3: SO SÁNH HAI CĂN BẬC 3

Phương pháp: $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$

Bài 1. So sánh:

a) 7 và $\sqrt[3]{345}$ b) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{18}$ và $\frac{3}{4}\sqrt[3]{12}$ c) $\sqrt[3]{130} + 1$ và $3\sqrt[3]{12} - 1$

HD:

a) $7 = \sqrt[3]{343} < \sqrt[3]{345}$ nên $7 < \sqrt[3]{345}$

b) $\frac{2}{3} \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{\frac{8}{27} \cdot 18} = \sqrt[3]{5 \frac{1}{3}} ; \frac{3}{4} \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{\frac{27}{64} \cdot 12} = \sqrt[3]{5 \frac{1}{16}}$

c) $\sqrt[3]{130} + 1 > \sqrt[3]{125} + 1 = 6 ; \quad 3\sqrt[3]{12} - 1 = \sqrt[3]{324} - 1 < \sqrt[3]{343} - 1 = 7 - 1 = 6$

Bài 2. So sánh:

a) $A = 2\sqrt[3]{3}$ và $B = \sqrt[3]{23}$ b) $A = 33$ và $B = 3\sqrt[3]{133}$ c) $A = 5\sqrt[3]{6}$ và $B = 6\sqrt[3]{5}$

HD:

a) $A = 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24} > \sqrt[3]{23}$ nên $A > B$

b) $A > B$

c) $A < B$

Bài 3. So sánh: $A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ và $B = 2\sqrt{5}$

HD:

Chú ý: $20 \pm 14\sqrt{2} = (2 \pm \sqrt{2})^3$ nên $A = 4 \Rightarrow A < B$.

Bài 4. So sánh:

a) $\sqrt[3]{124} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{26}$ và 10

b) $\sqrt[3]{29} + \sqrt[3]{65} - \sqrt[3]{8}$ và 5

HD:

a) $\sqrt[3]{124} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{26} < \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 5 + 2 + 3 = 10$

b) $\sqrt[3]{29} + \sqrt[3]{65} - \sqrt[3]{8} > \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{8} = 3 + 4 - 2 = 5$

Bài 5. So sánh: $\sqrt[3]{2011} + \sqrt[3]{2013}$ và $2\sqrt[3]{2012}$

HD:

Đặt $\sqrt[3]{2011} = a; \sqrt[3]{2013} = b$ suy ra $\sqrt[3]{2012} = \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$

$$2\sqrt[3]{2012} = \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2} \cdot 8} = \sqrt[3]{4(a^3+b^3)}$$

Xét $4(a^3+b^3) - (a+b)^3 = 3(a+b) \cdot (a-b)^2 > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{4(a^3+b^3)} > a+b$

Vậy $2\sqrt[3]{2012} > \sqrt[3]{2011} + \sqrt[3]{2013}$

DẠNG 4: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp: $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$

Bài 1. Giải phương trình:

a) $\sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15$

b) $2\sqrt[3]{27x} + \frac{1}{7}\sqrt[3]{-343x} + \sqrt[3]{-729x} = 2$

HD:

a) $\sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15 \Leftrightarrow 10\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} = 15 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x} = 15 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 5 \Leftrightarrow x = 125.$

b) Tương tự câu a: $x = -\frac{1}{8}$

Bài 2. Giải phương trình: $\sqrt[3]{27(x-1)} - \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{64(x-1)} = -2$

HD:

$3\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-1} - 4\sqrt[3]{x-1} = -2 \Leftrightarrow -2\sqrt[3]{x-1} = -2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2.$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{2x+1} = 3$

b) $\sqrt[3]{2-3x} = -2$

c) $\sqrt[3]{x-1} + 1 = x$

d) $\sqrt[3]{x^3+9x^2} = x+3$

e) $\sqrt[3]{5+x} - x = 5$

HD:

a) Lập phương hai vế ta được: $2x+1 = 27 \Leftrightarrow 2x = 26 \Leftrightarrow x = 13.$

b) $x = \frac{10}{3}$ c) $x = 0; x = 1; x = 2$ d) $x = -1$ e) $x = -5; x = -4; x = -6$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

b) $\sqrt[3]{13-x} + \sqrt[3]{22+x} = 5$

c) $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt{x-3}$

HD: Sử dụng phương pháp đặt 2 ẩn phụ, đưa về hệ phương trình.

a) Đặt: $\sqrt[3]{x-2} = a; \sqrt{x+1} = b \geq 0$. Suy ra $a^3 = x-2; b^2 = x+1$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} a + b = 3 & (1) \\ a^3 - b^2 = -3 & (2) \end{cases}$$
 Từ (1) suy ra $b = 3-a$. Thay vào 2 ta được:

$a^3 - a^2 + 6a - 6 = 0 \Leftrightarrow (a^2 + 6)(a - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 1$. Suy ra $b = 2$ hay $\begin{cases} x-2 = 1 \\ x+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

b) Đặt: $\sqrt[3]{13-x} = a; \sqrt[3]{22+x} = b$ Suy ra: $\begin{cases} a + b = 5 \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases}$ ta tìm được: $x = -14; y = 5$

c) $x = 7$

Bài 5. Tìm x Biết: $2x^3 = (x - 1)^3$

HD:

$$\sqrt[3]{2x}^3 = (x - 1)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x = x - 1 \Leftrightarrow x(\sqrt[3]{2} - 1) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$$

Bài 6. Giải phương trình sau : $2 + 3\sqrt[3]{9x^2(x+2)} = 2x + 3\sqrt[3]{3x(x+2)^2}$

HD: pt $\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{3x})^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bài 7. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{7-x} = 2$

Lập phương hai vế ta được: $x + 1 + 7 - x + 3 \cdot \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{7-x} \cdot 2 = 8$

(sử dụng hđt: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$)

Suy ra $(x + 1)(7 - x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1; x_2 = 7$. Vậy phương trình có 2 nghiệm $x_1 = -1; x_2 = 7$.

Bài 8. Giải phương trình: $x\sqrt[3]{25-x^3} \left(x + \sqrt[3]{25-x^3} \right) = 30$

HD:

$$\text{Đặt } y = \sqrt[3]{35-x^3} \Rightarrow x^3 + y^3 = 35$$

Khi đó phương trình chuyển về hệ phương trình sau: $\begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$, giải hệ này ta tìm được

$(x; y) = (2; 3) = (3; 2)$. Tức là nghiệm của phương trình là $x \in \{2; 3\}$

Bài 9. Giải phương trình $\sqrt[4]{17-x^8} - \sqrt[3]{2x^8-1} = 1$.

HD: Đặt $\sqrt[4]{17-x^8} = y$ với $y \geq 0$ và $\sqrt[3]{2x^8-1} = z$. Khi đó ta được hệ

$$\begin{cases} y - z = 1 \\ 2y^4 + z^3 = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y - 1 \\ 2y^4 + (y-1)^3 = 33 \end{cases}$$

Xét $2y^4 + (y-1)^3 = 33 \Leftrightarrow (y-2)(2y^3 + 5y^2 + 7y + 17) = 0$.

Suy ra được $y - 2 = 0$. Từ đó nghiệm của phương trình là $x = 1$ và $x = -1$.

Bài 10. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2-2} = \sqrt{2-x^3}$.

HD: Đặt $\sqrt[3]{x^2-2} = \sqrt{2-x^3} = y$ với $y \geq 0$. Khi đó ta được hệ $\begin{cases} x^2 = y^3 + 2 \\ x^3 = 2 - y^2 \end{cases}$ và từ phương trình ban

đầu ta có $x \leq -\sqrt{2}$. Xét hiệu hai phương trình của hệ ta được phương trình $(x+y)(x^2-xy+y^2-x+y)=0$.

Với $x=-y$ thì $x=-\sqrt[3]{x^2-2}$, dẫn đến vô nghiệm.

Còn $x^2-xy+y^2-x+y=(y-x)(1-x)+y^2 > 0$ với mọi $y \geq 0$ và $x \leq -\sqrt{2}$. Do đó hệ vô nghiệm hay phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 11. Giải các phương trình:

1. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 1 + \sqrt[3]{x^2+3x+2}$

2. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2+x}$.

HD:

1. Pt $\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+1}-1)(\sqrt[3]{x+2}-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$

2. Nhận xét: $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia hai vế của pt cho $\sqrt[3]{x}$ ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} + \sqrt[3]{x} = 1 + \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} - 1 \right) (\sqrt[3]{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x=1$$

Bài 12. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt[3]{x^3-2}$.

HD:

Đk $x \geq \sqrt[3]{2}$

Nhận thấy $x=3$ là nghiệm của phương trình, nên ta biến đổi phương trình:

$$\sqrt[3]{x^2-1} - 2 + x - 3 = \sqrt[3]{x^3-2} - 5 \Leftrightarrow (x-3) \left[1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} \right] = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

Ta chứng minh: $1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} = 1 + \frac{x+3}{(\sqrt[3]{x^2-1}+1)^2 + 3} < 2 < \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$

Vậy pt có nghiệm duy nhất $x=3$

Bài 13. Giải phương trình: $\sqrt{\sqrt{3}-x} = x\sqrt{\sqrt{3}+x}$

Giải:

Đk: $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ khi đó pt đ cho tương đương : $x^3 + \sqrt{3}x^2 + x - \sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{10}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{10} - 1}{\sqrt{3}}$$

Bài 14. Giải phương trình sau : $2 + 3\sqrt[3]{9x^2(x+2)} = 2x + 3\sqrt[3]{3x(x+2)^2}$

Giải : pt $\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{3x})^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bài 15. Giải phương trình: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$

HD:

$$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$$

$$y = \sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow y^3 + 1 = 2x$$

- Phương trình được chuyển thành hệ

$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ x^3 - y^3 = -2(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^3 + 1 = 2y \\ x^2 + xy + y^2 + 2 = 0(vn) \\ x^3 + 1 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Bài 16. Giải phương trình: $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7-x)(2-x)} = 3$

HD:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{2-x} \\ v &= \sqrt[3]{7+x} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u^2 + v^2 - uv &= 3 \\ u^3 + v^3 &= 9 \end{aligned} \Rightarrow u; v = (1; 2) \Rightarrow x = 1; -6$$

Bài 17. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$

HD:

Đặt $\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{2-x} \\ v &= \sqrt{x-1} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u + v &= 1 \\ u^3 + v^2 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow u; v = (0; 1); (1; 0); (-2; 3) \Rightarrow x = 1; 2; 10$