

◀ I ▶ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

A) HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI I

Hệ phương trình loại I theo ẩn x và y : Là hệ phương trình mà khi ta đổi vai trò của các ẩn x và y thì hệ phương trình vẫn không thay đổi.

Dạng hệ phương trình $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ với $\begin{cases} f(x,y)=f(y,x) \\ g(x,y)=g(y,x) \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$.

Hệ phương trình ở dạng thu gọn $\begin{cases} f(S,P)=0 \\ g(S,P)=0 \end{cases}$, điều kiện $S^2 \geq 4P$.

(với S là tổng hai nghiệm và P là tích hai nghiệm).

■ Phương pháp giải:

Bước 1: Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ và x, y chính là nghiệm của phương trình.

Điều kiện $S^2 \geq 4P$.

Bước 2: Xác định S và P .

Khi đó S và P là nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 - SX + P = 0$.

Bước 3: Giải phương trình: bậc hai theo ẩn X .

Bước 4: Suy ra giá trị x, y .

Ví dụ 1:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 + x - y = 5 \\ x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = 6 \end{cases}$.

■ Giải:

Ta có hệ phương trình tương đương $\begin{cases} (x^2 - y^2) + (x - y) = 5 \\ (x^2 - y^2)(x - y) = 6 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a = x^2 - y^2 \\ b = x - y \end{cases}$.

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6 \end{cases}$.

Suy ra a và b là hai nghiệm của phương trình: $X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ X = 3 \end{cases}$.

$$\text{Với } \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{2}{3} \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{6} \\ y = -\frac{7}{6} \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{4} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Ví dụ 2:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$.

■ **Giải:**

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases} \quad (S^2 \geq 4P)$.

Hệ Phương trình trở thành: $\begin{cases} S^2 - P = 4 \\ S + P = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 - S \\ S^2 - (2 - S) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 - S \\ S^2 + S - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 - S \\ S = 2 \\ S = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S = -3 \\ P = 5 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} S = 2 \\ P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

Với $\begin{cases} S = -3 \\ P = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - y \\ y(-3 - y) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - y \\ y^2 + 3y + 5 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - y \\ \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = 0 \end{cases} \text{ (hệ phương trình vô nghiệm).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x; y) = (2; 0), (0; 2)$.



Bài tập tương tự:

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + y = 19 \\ x^2y + xy^2 = 84 \end{cases}$

Đáp số: $(x; y) = (6 + \sqrt{42}; 6 - \sqrt{42}), (6 - \sqrt{42}; 6 + \sqrt{42}), (3; 4), (4; 3)$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ xy + y + z = 5 \end{cases}$

Đáp số: $(x; y) = (1; 2), (2; 1)$.

3) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 2 \\ xy = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (1; -\sqrt{3}), (-1; \sqrt{3})$.

4) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^4 + y^4 = 97 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (2; 3), (3; 2)$.

5) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x - y - xy = 3 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (1; -1)$.

B) HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI II

Hệ phương trình đối xứng loại II theo ẩn x và y là hệ phương trình mà khi ta đổi vai trò của x cho y thì hai phương trình của hệ sẽ hoán đổi cho nhau. Dạng phương trình
$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f(y, x) = 0 \end{cases}$$

■ Phương pháp giải:

Bước 1: Cộng hoặc trừ hai vế của hai phương trình để đưa hệ phương trình về phương trình tích và lập hệ phương trình:

$$\text{Đưa về dạng } \begin{cases} f(x, y) - f(y, x) = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} f(x, y) + f(y, x) = 0 \\ ff(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x - y) \cdot f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

Bước 2: Giải hệ phương trình vừa lập được.

Bước 3: Xét nghiệm của hệ phương trình là nghiệm của từng phương trình trong hệ ở bước 1.

Ví dụ 1:

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 1 = 3y \quad (1) \\ y^2 + 1 = 3x \quad (2) \end{cases}$$

■ Giải:

Lấy (1) trừ vế theo vế cho (2), ta được: $(x^2 + 1) - (y^2 + 1) = 3y - 3x$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 3(y - x) \Leftrightarrow (x - y)(x + y) + 3(x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -3 - y \end{cases}$$

Với $x = y$ thế vào (1), ta được: $y^2 + 1 = 3y$

$$\Leftrightarrow y^2 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Với $x = -3 - y$ thế vào (2), ta được $y^2 + 1 = 3(-3 - y)$

$$\Leftrightarrow y^2 + 3y + 10 = 0 \Leftrightarrow \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm:

$$(x; y) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right).$$

Ví dụ 2:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \text{ (1)} \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \text{ (2)} \end{cases}$

■ **Giải:**

Lấy (1) trừ vế theo vế cho (2), ta được: $(x^2 - 2y^2) - (y^2 - 2x^2) = (2x + y) - (2y + x)$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - y^2) = x - y \Leftrightarrow 3(x - y)(x + y) = x - y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3(x + y) = 1 \end{cases}$$

Với $x = y$ thế vào (1) ta được $-x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -3 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$

Với $3(x + y) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 - 3y}{3}$ thế vào (2), ta được $y^2 - 2\left(\frac{1 - 3y}{3}\right)^2 = 2y + \frac{1 - 3y}{3}$

$$\Leftrightarrow y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{5}{9} = 0 \Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{19}{36} = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x; y) = (0; 0), (-3; -3)$.



Bài tập tương tự:

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$

Đáp số: $(x; y) = (0; 0), (\sqrt{3}; \sqrt{3}), (-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y + 2 = y^2 \\ xy^2 + 2 = x^2 \end{cases}$

Đáp số: $(x; y) = (-1; -1)$.

3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ x + xy + y^2 = 1 \end{cases}$

Đáp số: $(x; y) = (-1; -1), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), (t; 2t)$ với $t \in \mathbb{R}^+$.

C HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI

Dạng hệ phương trình
$$\begin{cases} ax^2 + by^2 + cxy + d = 0 & (1) \\ a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d' = 0 & (2) \end{cases}$$

■ Phương pháp giải:

Bước 1: Xét $x = 0$ ($y = 0$), thế vào cả hai phương trình để tìm nghiệm (nếu có).

Bước 2: Xét $x \neq 0$ ($y \neq 0$).

Đặt $x = ty$ ($y = tx$).

Ta có hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} at^2y^2 + by^2 + cty^2 = -d & (3) \\ a't^2y^2 + b'y^2 + c'ty^2 = -d' & (4) \end{cases}$$

Bước 3: Chia (3) cho (4), ta được:
$$\frac{at^2 + b + ct}{a't^2 + b' + c't} = \frac{d}{d'}$$

Ta đưa về phương trình bậc hai ẩn t rồi tiến hành giải.

Ví dụ 1:

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 13 \\ x^2 + 4xy - 2y^2 = -6 \end{cases}$$

■ Giải:

Xét $x = 0$, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 3y^2 = 13 \\ -2y^2 = -6 \end{cases}$$
 (vô nghiệm).

Xét $x \neq 0$, đặt $y = tx$.

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 2x^2 - tx^2 + 3t^2x^2 = 13 \\ x^2 + 4tx^2 - 2t^2x^2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(2 - t + 3t^2) = 13 & (1) \\ x^2(1 + 4t - 2t^2) = -6 & (2) \end{cases}$$

Chia (1) cho (2) theo vế, ta được:
$$\frac{2 - t + 3t^2}{1 + 4t - 2t^2} = \frac{13}{-6}$$

$$\Leftrightarrow 8t^2 - 46t - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{25}{4} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $t = \frac{25}{4}$ thế vào (1), ta được:
$$x^2 \left[2 - \frac{25}{4} + 3 \cdot \left(\frac{25}{4} \right)^2 \right] = 13 \Leftrightarrow \frac{1807}{16} x^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{139} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\sqrt{139}} \Rightarrow y = \frac{25}{\sqrt{139}} \\ x = -\frac{4}{\sqrt{139}} \Rightarrow y = -\frac{25}{\sqrt{139}} \end{cases}$$

Với $t = -\frac{1}{2}$ thế vào (1), ta được:
$$x^2 \left[2 - \left(-\frac{1}{2} \right) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right] = 13 \Leftrightarrow \frac{13}{4} x^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = -1 \\ x = -2 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm:

$$(x; y) = \left(\frac{4}{\sqrt{139}}; \frac{25}{\sqrt{139}} \right), \left(-\frac{4}{\sqrt{139}}; -\frac{25}{\sqrt{139}} \right), (2; -1), (-2; 1).$$

Ví dụ 2:

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$$

■ **Giải:**

Xét $x = 0$, ta được hệ phương trình $\begin{cases} y^2 = -1 \\ 3y^2 = 13 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Xét $x \neq 0$, đặt $y = tx$ ta được hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 3tx^2 + t^2x^2 = -1 & (1) \\ 3x^2 - tx^2 + 3t^2x^2 = 13 & (2) \end{cases}$

Chia (1) cho (2) theo vế, ta được $\frac{1 - 3t + t^2}{3 - t + 3t^2} = -\frac{1}{13}$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $t = 2$ thế vào (1), ta được: $-x^2 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$

Với $t = \frac{1}{2}$ thế vào (1), ta được: $-\frac{1}{4}x^2 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x; y) = (1; 2), (-1; -2), (2; 1), (-2; -1)$.



Bài tập tương tự:

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 2y^2 = 7 \\ x^2 + 6xy - 3y^2 = -8 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (-1; 1), (1; -1), \left(\frac{5}{\sqrt{241}}; \frac{31}{\sqrt{241}} \right), \left(-\frac{5}{\sqrt{241}}; -\frac{31}{\sqrt{241}} \right)$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^2 - 5xy - 4y^2 = -3 \\ 9x^2 + 11xy - 8y^2 = 6 \end{cases}$$

3) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases}$$

4) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ 5x^2 - 7xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$$

5) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \end{cases}$$

II BÀI TẬP

1

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{y}\right) = xy + \frac{1}{xy} \end{cases}$$

■ Giải

Hệ phương trình tương đương với:
$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right) + \left(y + \frac{1}{x}\right) = \frac{9}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{y}\right) = \left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right) - 2 \end{cases}$$

Đặt
$$\begin{cases} u = x + \frac{1}{y} \\ v = y + \frac{1}{x} \end{cases}$$

Hệ phương trình trở thành:
$$\begin{cases} u + v = \frac{9}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{2}u = uv - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{9}{2} - u \\ \frac{9}{4} + \frac{3u}{2} = u\left(\frac{9}{2} - u\right) \end{cases}$$

Suy ra:
$$\frac{9}{4} + \frac{3u}{2} = \frac{9u}{2} - u^2 \Leftrightarrow u^2 - 3u + \frac{9}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{3}{2} \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ y + \frac{1}{x} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy + 1 = \frac{3y}{2} \\ xy + 1 = 3x \end{cases} \Rightarrow \frac{3y}{2} = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow y + \frac{2}{y} = 3 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm: $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 1\right), (1; 2)$.

Nhận xét: Bài toán sử dụng phương pháp đặt hai ẩn phụ, đưa về hệ phương trình bậc hai cơ bản giải bằng phương pháp thế. Sau đó từ nghiệm ẩn phụ suy ngược lại nghiệm của hệ phương trình.

Ý tưởng: Hình thức bài toán khá phức tạp vì sự xuất hiện của phân thức, quan sát ta thấy ở cả hai phương trình của hệ đều xuất hiện biểu thức $x + \frac{1}{y}$. Ta sẽ nghĩ đến chuyện thế $x + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} - \left(y + \frac{1}{x}\right)$ xuống phương trình hai nhưng còn đại lượng $xy + \frac{1}{xy}$ chưa biết xử lý như thế nào. Có lẽ tác giả đã gợi mở theo con đường đặt ẩn phụ, nếu đặt $u = x + \frac{1}{y}; v = y + \frac{1}{x}$ thì bây giờ ta chỉ cần biểu diễn $xy + \frac{1}{xy}$ qua $u; v$ thì hệ phương trình đã cho sẽ được giải quyết.

Ta có
$$\begin{cases} u = x + \frac{1}{y} \Leftrightarrow uy = xy + 1 \\ v = y + \frac{1}{x} \Leftrightarrow vx = xy + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow uvxy = (xy + 1)^2 \Leftrightarrow uv = xy + \frac{1}{xy} + 2.$$

Khi đó, hệ Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} u + v = \frac{9}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{2}u = uv - 2 \end{cases}.$$

Hệ phương trình trên là hệ phương trình cơ bản, hoàn toàn giải quyết được bằng phương pháp thế.

Bài toán kết thúc.



Bài tập tương tự:

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(1 + y^2) = 2 \\ 1 + xy + x^2y^2 = 3x^2 \end{cases}$.

Đáp số: $(x; y) = (1; 1), (-1; -1), \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}; \frac{5}{\sqrt{7}}\right), \left(\frac{\sqrt{7}}{4}; -\frac{5}{\sqrt{7}}\right)$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x + 1)^2(y + 1)^2 = 27xy \\ (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10xy \end{cases}$.

Đáp số: $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2 \pm \sqrt{3}\right), (2; 2 \pm \sqrt{3}), \left(2 - \sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$.

2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 4 \end{cases}$.

■ **Giải**

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 4 \end{cases}$.

Thế $1 = x^2 - xy + y^2$ xuống vế phải phương trình thứ hai của hệ phương trình, ta có:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + 2y^2 &= 4(x^2 - xy + y^2) \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 5xy + 2y^2 &= 0 \Leftrightarrow (x - y)(3x - 2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x = 2y \end{cases}. \end{aligned}$$

Với $y = x$, thế vào phương trình thứ nhất trong hệ, ta được $x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$.

Với $3x = 2y \Leftrightarrow y = \frac{3x}{2}$, thế vào phương trình thứ nhất trong hệ, ta được:

$$\frac{7}{4}x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{7}} \\ x = -\frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow y = -\frac{3}{\sqrt{7}} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm kể trên.

Nhận xét: Bài toán sử dụng phương pháp thế và tách ghép phương trình đẳng cấp bậc hai tìm nhân tử chung.



Nhắc lại kiến thức và phương pháp:

- Phương trình đẳng cấp bậc hai có dạng: $a.x^2 + b.xy + c.y^2 = 0$.
- Nhóm nhân tử chung, đưa về dạng

$$a.x^2 + b.xy + c.y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - m.y)(x - n.y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = my \\ x = ny \end{cases}$$

Hai trường hợp này, thế vào một trong hai phương trình còn lại của hệ, sẽ được phương trình có dạng $\begin{cases} x^2 = t \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{t} \\ y^2 = u \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{u} \end{cases}$.

Chú ý: nếu $t, u < 0$ thì phương trình sẽ vô nghiệm.

Ý tưởng: Nhận thấy ở vế trái của mỗi phương trình đều có dạng của phương trình đẳng cấp bậc hai $a.x^2 + b.xy + c.y^2$, nếu thế một trong hai phương trình còn lại ta cũng sẽ thu được một phương trình bậc đẳng cấp bậc hai bằng 0. Từ đó tìm mối quan hệ giữa x, y . Thế ngược lại phương trình thứ nhất của hệ. Tìm nghiệm.

- Ở vế phải phương trình thứ hai có $4 = 4.1$ mà từ phương trình một $1 = x^2 - xy + y^2$. Vậy nên phương trình hai trở thành:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + 2y^2 &= 4(x^2 - xy + y^2) \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 5xy + 2y^2 &= 0 \Leftrightarrow (x - y)(3x - 2y) = 0. \end{aligned}$$

- Có thể dễ dàng giải phương trình theo cách đồng nhất hệ số ở bước làm ra nháp như sau:
 $3x^2 - 5xy + 2y^2 = 3(x - my)(x - ny) = 3(x^2 - mxy - nxy + mny^2)$.

Đồng nhất hệ số hai phương trình, ta có $\begin{cases} 3m + 3n = 5 \\ 3mn = 2 \end{cases}$.

Đây là phương trình hai ẩn, đã biết cách giải theo Vi-ét, tìm được $m = 1; n = \frac{2}{3}$.

Bài toán kết thúc.



Bài tập tương tự:

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ 3x^2 - xy - 5y^2 = 5 \end{cases}$.

Đáp số: $(x; y) = (2; 1), (-2; -1), \left(\frac{5}{\sqrt{3}}; -\frac{4}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + x^2y + y^3 = 3 \\ x^2 - xy^2 + 3y^3 = 3 \end{cases}$.

Đáp số: $(x; y) = (1; 1), (2; -1), (\sqrt[3]{3}; 0)$.

3

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ x^2 + 2xy - y^2 - 3x - y = -2. \end{cases}$$

■ Giải

Cộng từng vế hai phương trình ta có: $2x^2 + xy - 3x - y = -1$

$$\Leftrightarrow x(2x + y) - x - (2x + y) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(2x + y - 1) = 0.$$

TH1: $x = 1 \Rightarrow y^2 - y = 0 \Rightarrow y = 0$ hoặc $y = 1$ (thỏa mãn).

TH2: $2x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 2x$, suy ra

$$x^2 - x(1 - 2x) + (1 - 2x)^2 = 1 \Leftrightarrow 7x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{5}{7} \Rightarrow y = -\frac{3}{7}. \end{cases}$$

Đáp số $(x; y) = (1; 0), (1; 1), (0; 1), \left(\frac{5}{7}; -\frac{5}{7}\right)$.

Nhận xét: Bài toán sử dụng phương pháp hằng số biến thiên tìm ra được một phương trình biến đổi mỗi liên hệ giữa hai biến và từ đó thế ngược lại một trong hai phương trình, tìm nghiệm của hệ.

Ý tưởng: Đây là hệ phương trình bậc hai, trước hết ta sẽ đi tìm nhân tử ở từng phương trình một trong hệ, nếu công việc này thất bại. Ta sẽ nghĩ đến việc kết hợp cả hai phương trình. Và điều tối ưu ta nghĩ tới sẽ là xét đenta theo ẩn x hoặc y từng phương trình (bạn đọc từ làm) khi đó không tìm được nhân tử $x; y$. Chính vì thế, còn hướng duy nhất đó là kết hợp hai phương trình của hệ, giả sử tồn tại $k \in \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình:

$$k(x^2 - xy + y^2 - 1) + x^2 + 2xy - y^2 - 3x - y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+k)x^2 + [(2-k)y - 3]x + (k-1)y^2 - y + 2 - k = 0 \quad (i).$$

Và ta coi (i) là phương trình bậc hai ẩn x đồng thời khi xét Δ_x nó phải là một số chính phương. Ta có:

$$\Delta_x = [(2-k)y - 3]^2 - 4(1+k)[(k-1)y^2 - y + 2 - k]$$

$$= (5k^2 - 4k)y^2 - (10k - 8)y + 4k^2 - 4k + 1.$$

Để Δ_x là số chính phương khi hệ số y^2 phải là một chính phương, tức là ta đi Giải phương trình: nghiệm nguyên $5k^2 - 4k = m^2$. Không khó để ta thấy rằng $k = 1 \Rightarrow m = 1$ thỏa mãn. Hay nói cách khác: $\Delta_x = (y - 1)^2$. Khi đó phương trình (i):

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 3)x + 1 - y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - y + y - 1}{2} = 1 \\ x = \frac{3 - y - y + 1}{2} = 2 - y \end{cases}.$$

Việc còn lại là thế $x=1$ hoặc $x+y=2$ vào phương trình một để tìm nghiệm của hệ phương trình.

Bài toán kết thúc.



Bài tập tương tự:

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3y^2 + 9 \\ x^2 + y^2 = x - 4y \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}; \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2} \right)$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x = 0 \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (-3 \pm 2\sqrt{2}; 1 \mp \sqrt{2}), \left(-3 \pm \sqrt{5}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$.

4

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ 2x^3 = (x+y)(2-xy) \end{cases}$$

■ **Giải**

Từ hệ phương trình đã cho ta có $2x^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy) = x^3 + y^3 \Leftrightarrow x = y$.

Do đó hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm 1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1), (-1; -1)$.

Nhận xét: Bài toán sử dụng phương pháp thế để đưa về phương trình đẳng cấp có mối liên hệ giữa các biến sau đó thế ngược lại một trong hai phương trình của hệ ban đầu để tìm nghiệm.



Nhắc lại kiến thức và phương pháp:

- Hằng đẳng thức dạng:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \text{ và } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

- Phương trình dạng: $x^3 = y^3 \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 0$.

Vì $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0$.

Ý tưởng: Cả hai phương trình đều xuất hiện hằng số 2. Đồng thời ở phương trình thứ hai có dáng dấp là một phương trình đẳng cấp bậc ba vì vế trái chứa $2x^3$ còn vế phải chứa tích của một hàm số bậc nhất và một hàm số bậc hai vì vậy ta sẽ thực hiện phép thế $2 = x^2 + y^2$

vào vế phải của phương trình hai, ta sẽ có: $2x^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy)$ (*). Với phương trình này (*) nếu bạn nào tinh ý ra sẽ phát hiện được hằng đẳng thức $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Vì thế (*) $\Leftrightarrow 2x^3 = x^3 + y^3 \Leftrightarrow x = y$. Không thì khai triển tích ra ta cũng sẽ có được điều đó. Việc còn lại chỉ là thế $x = y$ ngược lại phương trình thứ nhất trong hệ và tìm nghiệm.

Bài toán kết thúc.



Bài tập tương tự:

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x^2 = (x + y)(2 - x) \end{cases}$.

Đáp số: $(x; y) = (1; 1), (-1; \frac{5}{3})$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 4 \\ 2x^3 = (x + y)(2 - xy) \end{cases}$.

Đáp số: $(x; y) = (1; 1), (-1; -1)$.

5

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 + y - x + xy \\ 7xy + y - x = 7 \end{cases}$

■ Giải

Cộng hai phương trình của hệ ta thu được

$$x^3 + y^3 + 6xy = 8 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + (-2)^3 - 3xy(-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 2)(x^2 + y^2 + 4 - xy + 2y + 2x) = 0$$

Ta luôn có: $x^2 + y^2 + (-2)^2 \geq xy + (-2y) + (-2x)$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = -2$.

Vậy nếu $x^2 + y^2 + 4 - xy + 2y + 2x = 0$ ta suy ra $x = y = -2$ (loại) vì không thỏa mãn phương trình: $7xy + y - x = 7$.

Vậy thu được hệ $\begin{cases} x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x \\ 7xy + y - x = 7 \end{cases}$.

$$\text{Suy ra } 7x(2 - x) + 2 - 2x = 7 \Leftrightarrow 7x^2 - 12x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{5}{7} \Rightarrow y = \frac{9}{7} \end{cases}$$

Nhận xét: Bài toán sử dụng phương pháp thế (hay cộng vế) để ra được phương trình có mối liên hệ giữa các biến. Sau đó thế ngược lại tìm nghiệm của hệ phương trình.



Nhắc lại kiến thức và phương pháp:

- Tổng các đại lượng không âm:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

- Đẳng thức:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Ý tưởng: Cả hai phương trình của hệ, đều xuất hiện nhân tử $x - y$ vì thế ta sẽ nghĩ đến chuyển thế $x - y$ từ phương trình một vào phương trình hai (hoặc ngược lại), do đó ta có được $x^3 + y^3 + 6xy - 8 = 0$ (i). Đến đây ta mong muốn sẽ biểu diễn mối quan hệ giữa x, y , quan sát phương trình (i), ta thấy rằng $(-2)^3 = -8$ và $6xy = 3xy(-2)$ do đó nếu đặt $z = -2$ thì (i) $\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$. Một biểu thức đối xứng rất đẹp, bằng cách nhóm nhân tử, ta có:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= 0 \Leftrightarrow (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz + z^2) - 3xy(x + y + z) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Để thấy $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$ do đó, phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = y = z \end{cases}$. Công việc còn lại là thay $z = -2$ suy ra $\begin{cases} x + y = 2 \\ x = y = -2 \end{cases}$. Nhưng $x = y = -2$ loại vì không thỏa mãn phương trình hai trong hệ. Với $x + y = 2$ thay xuống phương trình hai, ta tìm được nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (1; 1), \left(\frac{5}{7}; \frac{9}{7}\right)$.

Bài toán kết thúc.



Bài tập tương tự:

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 + 1 = 3xy \\ x^2 + y^2 - x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$.

Đáp số: $(x; y) = (1; 1), \left(\frac{1 - \sqrt{33}}{4}; \frac{-5 + \sqrt{33}}{4}\right), \left(\frac{1 + \sqrt{33}}{4}; \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}\right)$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 + x = 2xy + 3 \\ x + xy = 4 \end{cases}$.

Đáp số: vô nghiệm

6

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 + xy = 12 \\ 6x + x^2y = 12 + 6y + y^2x \end{cases}$.

■ Giải

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} (x - y)(2x + 3y) = 12 \\ 6(x - y) + xy(x - y) = 12 \end{cases}$.

Suy ra: $(x - y)(2x + 3y) = (x - y)(6 + xy) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 3y = 6 + xy. \end{cases}$ (loại)

Ta có: $2x + 3y = (6 + xy) \Leftrightarrow (x - 3)(y - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

+ Với $x = 3$, thay vào phương trình đầu của hệ ta có

$$18 - 3y^2 + 3y = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

+ Với $y = 2$, thay vào phương trình đầu của hệ ta có

$$2x^2 + 2x - 12 = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (3; -1), (3; 2), (-4; 2)$.

Nhận xét: Bài toán sử dụng phương pháp thế hằng số ở cả hai phương trình, sau đó phương trình thu được phân tích thành nhân tử và thế ngược lại một trong hai phương trình của hệ tìm nghiệm của hệ phương trình.

Ý tưởng: Thoạt nhìn, ta sẽ nghĩ đến hướng xét Δ ẩn x hoặc y ở phương trình thứ hai của hệ và mong muốn đenta chính phương. Nhưng hướng đi này sẽ thất bại, vì dễ thấy cũng từ phương trình hai, ta tách được rằng $6(x - y) + xy(x - y) = 12 \Leftrightarrow (x - y)(xy + 6) = 12$. Mặt khác, xét vế trái của phương trình một nếu coi đây là một phương trình đẳng cấp bậc hai, ta sẽ có được $2x^2 - 3y^2 + xy = (x - y)(2x + 3y)$. Khi đó hệ Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x - y)(2x + 3y) = 12 \\ (x - y)(xy + 6) = 12 \end{cases}$$

Đây là một hệ rất đẹp vì nhân tử $x - y; 12$ đều xuất hiện ở cả hai phương trình, chính vì thế suy ra:

$$(x - y)(2x + 3y) = (x - y)(xy + 6) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x + 3y = xy + 6 \quad (*) \end{cases}$$

Với (*), dễ thấy nhân tử như sau: $(*) \Leftrightarrow (x - 3)(y - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

Việc còn lại là thế ngược lại tìm nghiệm của hệ phương trình.

Bài toán kết thúc.

7

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 - 3x^2 + 6x + 3y = 4 \\ 2x^2 - xy + y^2 = 11 \end{cases}$.

■ **Giải**

Phương trình đầu của hệ tương đương với: $(x - 1)^3 + 3(x - 1) + y^3 + 3y = 0$

$$\Leftrightarrow (x + y - 1) \left[(x - 1)^2 - (x - 1)y + y^2 + 3 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x.$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$2x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 = 11$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = -1 \\ x = \frac{-5}{4} \Rightarrow y = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Đáp số $(x; y) = (2; -1), \left(\frac{-5}{4}; \frac{9}{4}\right)$.

Nhận xét: Bài toán sử dụng phương pháp tìm nhân tử từ một phương trình sau đó thế vào phương trình còn lại tìm nghiệm của hệ phương trình.



Nhắc lại kiến thức và phương pháp:

- Cách Giải phương trình: bậc hai tổng quát: $a.t^2 + b.t + c = 0$ ($a \neq 0$).

- Hằng đẳng thức:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \text{ và } (ax + by)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2y + 3ab^2xy^2 + b^3y^3.$$

Ý tưởng: Quan sát hệ phương trình, phương trình đầu là phương trình bậc ba (bậc giảm từ 3 đến 0), phương trình còn lại là phương trình bậc hai vì thế không thể đưa về dạng đẳng cấp bậc ba. Việc kết hợp cả hai phương trình đã thất bại, vì vậy ta sẽ đi xét từng phương trình một của hệ. Ở phương trình hai có thể làm nháp là: xét Δ bậc hai đối với x hoặc y thì rõ ràng Δ không chính phương. Ta chuyển sang phương trình một, rõ ràng ta thấy được sự độc lập giữa hai biến $x; y$. Ở biến y xuất hiện hàm $y^3 + 3y$ đồng thời biến x xuất hiện hàm $x^3 - 3x^2 + 6x - 4$. Vậy để tìm được nhân tử chung giữa $x; y$ thì ta cần đưa hàm x về hàm đơn giản y , tức là đưa về dạng $(x-a)^3 + 3(x-a) + y^3 + 3y = 0$. Bằng phương pháp đồng nhất hệ số, ta có: $(x-a)^3 + 3(x-a) = x^3 - 3x^2 + 6x - 4 \Rightarrow a = 1$. Do đó phương trình đầu của hệ $\Leftrightarrow (x-1)^3 + 3(x-1) + y^3 + 3y = 0$. Bây giờ ta xét đến hằng đẳng thức dạng $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ thì sẽ xuất hiện nhân tử chung là $x-1+y$ như sau:

$$(x-1)^3 + 3(x-1) + y^3 + 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1+y) \left[(x-1)^2 - (x-1)y + y^2 \right] + 3(x-1+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1) \left[(x-1)^2 - (x-1)y + y^2 + 3 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1-x \\ (x-1)^2 - (x-1)y + y^2 + 3 = 0 (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) vô nghiệm vì $(*) \Leftrightarrow \left(x-1-\frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 3 > 0$.

Thế $y = 1-x$ vào phương trình hai giải phương trình bậc hai.

Bài toán kết thúc.



Bài tập tương tự:

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 4y = y^3 - 4x \\ \sqrt{y^2 + 4y + 5} = 2 - 3x \end{cases}$.

Đáp số: $(x; y) = \left(\frac{8 - 2\sqrt{13}}{3}; \frac{8 - 2\sqrt{13}}{3} \right)$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + x - 2 = y^3 + 3y^2 + 4y \\ x^5 + y^3 + 1 = 0 \end{cases}$

Đáp số: $(x; y) = (0; -1)$.

8

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ 2x^2 + 3xy = 1 + 4x \end{cases}$.

■ **Giải**

Cộng 2 phương trình của hệ, ta được: $3x^2 + y^2 + 4xy = 4 + 4x$

$$\Leftrightarrow (2x + y)^2 = (x + 2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + y = -2 \end{cases}$$

Nhận xét: Bài toán kết hợp sự tinh tế giữa hai phương trình, để đưa ra được một phương trình tìm được mối quan hệ giữa $x; y$ (hay còn gọi là phương pháp hệ số bất định giải hệ phương trình hữu tỷ). Và từ đó thế ngược lại một trong hai phương trình của hệ ban đầu để tìm nghiệm.



Nhắc lại kiến thức và phương pháp:

- Cách Giải phương trình: bậc hai tổng quát: $a.t^2 + b.t + c = 0$ ($a \neq 0$).
- Đưa hệ phương trình đã cho về dạng $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$.
- Giả sử tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x; y) + k.g(x; y) = 0$ (i). Coi phương trình (i) là phương trình bậc hai ẩn x hoặc ẩn y , sau đó xét Δ sao cho Δ là một số chính phương, từ đó sẽ tìm được $k \in \mathbb{R}$ cũng như mối quan hệ giữa $x; y$.

Ý tưởng: Nhận thấy hai phương trình của hệ không thể tìm được nhân tử chung trong chính nó, đồng thời ở phương trình hai có sự độc lập của biến y nên có thể rút y và thế vào phương trình một sẽ được phương trình bậc bốn, nhưng ta chưa biết nó có nghiệm đẹp không, nhờ chẳng may nó có nghiệm hữu tỷ hoặc nghiệm không tường minh. Vì vậy, ta nghĩ đến hướng kết hợp cả hai phương trình của hệ, bằng cách tìm số $k \in \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình $f(x; y) + k.g(x; y) = 0$ (i). Sẽ có rất nhiều giá trị của $k \in \mathbb{R}$ đạt yêu cầu bài toán nhưng ta chỉ tìm k duy nhất sao cho $\Delta_{(i)}$ là một số chính phương thì mới có thể tìm được nhân tử từ (i), ta làm như sau:

- Hệ phương trình đã cho tương đương với:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 3 = 0 \\ 2x^2 + 3xy - 4x - 1 = 0 \end{cases}$$

- Giả sử tồn tại $k \in \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$x^2 + y^2 + xy - 3 + k(2x^2 + 3xy - 4x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2k+1)x^2 + (3ky + y - 4k)x + y^2 - k - 3 = 0 \quad (*)$$

- Xét phương trình (*), coi là phương trình bậc hai ẩn x , ta có:

$$\Delta_x = (3ky + y - 4k)^2 - 4(2k+1)(y^2 - k - 3)$$

$$= (9k^2 - 2k - 3)y^2 - 8k(3k+1)y + 16k^2 + 4(2k+1)(k+3)$$

Để Δ_x là một số chính phương thì hệ số của y^2 trong biệt thức Δ_x cũng phải là một số chính phương, tức là ta cần phải đi giải phương trình nghiệm nguyên: $9k^2 - 2k - 3 = m^2$. Để

thấy phương trình này có nghiệm $\begin{cases} k=1 \\ m^2=4 \end{cases}$, thay ngược lại Δ_x , ta có:

$$\begin{cases} 3x^2 + (4y-4)x + y^2 - 4 = 0 \\ \Delta_x = (2y-8)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4-4y+2y-8}{6} \\ x = \frac{4-4y-2y+8}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 3x+2y+2=0 \end{cases}$$

- Với việc $k=1$, hay nói cách khác là cộng vế với vế của hai phương trình trong hệ, ta có thể biến đổi như sau:

$$x^2 + y^2 + xy - 3 + 2x^2 + 3xy - 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)^2 = (x+2)^2 \Leftrightarrow (x+y-2)(3x+y+2) = 0$$

Bài toán kết thúc.



Bài tập tương tự:

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \\ 4x^2 + 4x - \frac{57}{25} + y(3x+1) = 0 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right), \left(\frac{11}{25}; \frac{2}{5}\right)$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 96x^2 + 21x + 3y + 28xy = 117 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (1; 0), \left(\frac{24}{25}; \frac{7}{5}\right)$.

9

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-1)y^2 + x + y = 3 \\ (y-2)x^2 + y = x + 1 \end{cases}$$

■ Giải

Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} (x-1)y^2 + (x-1) = 2-y \\ (y-2)x^2 + (y-2) = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y^2+1) = 2-y \quad (1) \\ (y-2)(x^2+1) = x-1 \quad (2) \end{cases}$$

+) Nếu $x > 1$, suy ra $(x-1)(y^2+1) > 0$ nên từ (1) $\Rightarrow 2-y > 0 \Rightarrow y < 2 \Rightarrow (y-2)(x^2+1) < 0$;

Từ (2) $\Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$ (mâu thuẫn).

+) Nếu $x < 1$, tương tự suy ra $x > 1$ (mâu thuẫn).

+) Nếu $x = 1 \Rightarrow y = 2$ (thỏa mãn).

Đáp số: $x = 1; y = 2$

Nhận xét: Bài toán sử dụng kỹ thuật đánh giá theo miền nghiệm khi đoán trước được nghiệm của hệ phương trình.



Nhắc lại kiến thức và phương pháp:

- Cho hai biểu thức $f(x; y)$ và $g(x; y)$, trong đó $g(x; y) > 0$.

Xét biểu thức: $P = f(x; y).g(x; y)$.

Có hai trường hợp sau xảy ra đó là $P > 0 \Rightarrow f(x; y) > 0$ và $P < 0 \Rightarrow f(x; y) < 0$.

- Kỹ thuật nhằm nghiệm.

Ý tưởng: Bài toán này không phải là một hệ phương trình đồng bậc, nếu là đồng bậc hai thì ta có thể giải quyết bằng cách đưa về hệ số bất định. Nhưng một điều đáng lưu ý ở bài toán này đó chính là các biểu thức $x-1; y-2$ được gắn với hai đại lượng không âm. Nên nhiều khả năng sẽ xảy ra $(x-1)y^2 = (y-2)x^2 = 0$. Xét các trường hợp thì thấy $(x; y) = (1; 2)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Hoặc ta có thể sử dụng kỹ thuật nhằm nghiệm như sau, đó là giả sử $x = k$, bây giờ ta sẽ thay thử các giá trị của k , tất nhiên sẽ lấy các giá trị k nguyên và đẹp. Và cũng cho ta được nghiệm $(x; y) = (1; 2)$. Với cặp nghiệm này, thực chất bài

toán quy về giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 + y - 2 = 0 \\ y - 2 = x - 1 \end{cases}$$

Vì thế ta tách hệ phương trình ban đầu, và nhóm nhân tử như sau:

- Hệ phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)y^2 + x - 1 + y - 2 = 0 \\ (y-2)x^2 + y - 2 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y^2+1) = 2-y \quad (1) \\ (y-2)(x^2+1) = x-1 \quad (2) \end{cases}$$

- Đến đây, ta sẽ đánh giá miền nghiệm:

$$\text{TH1. Nếu } x > 1 \Rightarrow \begin{cases} (1) \Rightarrow (x-1)(y^2+1) > 0 \Rightarrow 2-y > 0 \Leftrightarrow y < 2 \\ (2) \Rightarrow (y-2)(x^2+1) > 0 \Leftrightarrow y > 2 \end{cases}$$

Hệ bất phương trình này vô nghiệm.

$$\text{TH2. Nếu } x < 1 \Rightarrow \begin{cases} (1) \Rightarrow (x-1)(y^2+1) < 0 \Rightarrow 2-y < 0 \Leftrightarrow y > 2 \\ (2) \Rightarrow (y-2)(x^2+1) < 0 \Leftrightarrow y < 2 \end{cases}$$

Hệ bất phương trình vô nghiệm

- Vậy $x = 1; y = 2$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

Bài toán kết thúc.



Bài tập tương tự:

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2(x-1)y^2 + x + y = 4 \\ (y-3)x^2 + y = x + 2 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (1; 3)$.

10

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 4 \\ 2x + y + xy = 4 \end{cases}$$

■ Giải

Cách 1: Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = 5 \\ x(y+1) + x + (y+1) = 5 \end{cases}$$

Đặt
$$\begin{cases} u = x + (y+1) \\ v = x(y+1) \end{cases} \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = (x+y+1)^2 - 2x(y+1) = u^2 - 2v.$$

Thu được
$$\begin{cases} u^2 - 2v = 5 \\ u + v = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^2 - 2(5-u) = 5 \Leftrightarrow u^2 + 2u - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 3 \Rightarrow v = 2 \\ u = -5 \Rightarrow v = 10 \end{cases}$$

+ Giải
$$\begin{cases} x + (y+1) = 3 \\ x(y+1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = 2, y = 0 \end{cases}$$

+ Giải
$$\begin{cases} x + (y+1) = -5 \\ x(y+1) = 10 \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(1; 1)$ và $(2; 0)$.

Cách 2: Hệ tương đương với
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 4 \\ 4x + 2y + 2xy = 8 \end{cases}$$

Cộng vế với vế hai phương trình ta thu được

$$(x+y)^2 + 4(x+y) - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+y=-6 \end{cases}$$

+ Giải $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y+xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+x(2-x)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=2 \Rightarrow y=0 \end{cases}$

+ Giải $\begin{cases} x+y=-6 \\ 2x+y+xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-6 \\ x+x(-6-x)=10 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1), (2; 0)$.

Nhận xét: Bài toán sử dụng phương pháp ẩn phụ sau đó từ ẩn phụ tìm ngược lại nghiệm của hệ phương trình.

Ý tưởng: Sự xuất hiện của $y^2 + 2y$ ở phương trình một của hệ, làm ta nghĩ đến hằng đẳng thức $y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2$ hay nói cách khác, từ phương trình một ta có: $x^2 + (y+1)^2 = 5$.

Đây là phương trình có dạng là tổng các bình phương, dễ làm ta suy đoán đến hệ phương trình đối xứng loại I, tức là đặt ẩn phụ theo định lý Vi-ét (đặt tổng và tích) như sau: $u = x + y + 1$ và $v = x(y+1)$.

Nhưng đây cũng chỉ là suy đoán ban đầu, bây giờ ta sẽ đi xét phương trình hai để xuất hiện u, v .

Thật vậy, ta có phương trình hai trong hệ tương đương với:

$$2x + y + xy = 4 \Leftrightarrow x(y+1) + x + y + 1 = 5.$$

Do đó hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} u^2 - 2v = 5 \\ u + v = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 3 \Rightarrow v = 2 \\ u = -5 \Rightarrow v = 10 \end{cases}$

Thế ngược lại tìm hệ của phương trình ban đầu.

Hoặc, ta có thể suy luận như sau: ta đi kết hợp cả hai phương trình trong hệ, vẫn với sự xuất hiện $x^2 + y^2$ ở phương trình một, đồng thời có tích ở phương trình xy ta sẽ liên tưởng đến hằng đẳng thức $(x+y)^2$. Vì thế lấy phương trình hai nhân 2 rồi cộng với phương trình một ta được: $(x+y)^2 + 4(x+y) - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+y=-6 \end{cases}$.

Thế ngược lại một trong hai phương trình trong hệ ban đầu để tìm nghiệm của hệ ban đầu.

Bài toán kết thúc.



Bài tập tương tự:

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4y = 1 \\ 3x + xy + y = 3 \end{cases}$.

Đáp số: $(x; y) = (1; 0), (2; -1)$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 4y = 0 \\ 3x + xy + 2y = 0 \end{cases}$.

Đáp số: $(x; y) = (0; 0), (1; -1)$.

11

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ x^3 + y^3 + 6 = 8x^2y^2 \end{cases}$$

■ Giải

Ta có: $x^3 + y^3 + 6 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = (x+y)^3$

$8x^2y^2 = 8 \cdot \left(\frac{2}{x+y}\right)^2 = \frac{32}{(x+y)^2}$ (do $x+y \neq 0$)

$\Rightarrow (x+y)^5 = 32 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$

Nhận xét: Bài toán sử dụng phương pháp thế, sau đó đưa về phương trình có chứa mối liên hệ giữa $x; y$ và thế ngược lại một trong hai phương trình của hệ, tìm nghiệm của hệ ban đầu.

Ý tưởng: Đây là một hệ phương trình đối xứng, đồng thời lại xuất hiện tổng $x+y$ và tích xy nên ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ ($u = x+y; v = xy$) nhưng việc phân tích $x^3 + y^3$ theo $u; v$ sẽ gặp khó khăn. Hướng đi này không khả thi, quan sát kỹ một chút, ta thấy rằng phương trình một có hằng số $2 = xy(x+y)$ đồng thời hằng số 6 xuất hiện ở phương trình hai nên ta nghĩ đến chuyển thế, đồng thời chú ý đến hằng đẳng thức $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$. Phương trình hai trong hệ tương đương với: $(x+y)^3 = 8x^2y^2$ mà $xy = \frac{2}{x+y}$ suy ra $(x+y)^5 = 32 \Leftrightarrow x+y=2$. Khi đó hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} xy=1 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$

Bài toán kết thúc.



Bài tập tương tự:

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2xy(2x+y) = 1 \\ 8x^3 + y^3 + 6 = 32x^2y^2 \end{cases}$$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy(2x+4y) = 1 \\ x^3 + 8y^3 + 6 = 32x^2y^2 \end{cases}$$

12

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3y - xy = 3 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$$

■ Giải

Ta có: $x + 3y - xy = 3 \Leftrightarrow (x-3)(1-y) = 0.$

+ Với $x=3 \Rightarrow 9 + y^2 + 3y = 3 \Leftrightarrow y^2 + 3y + 6 = 0$ (vô nghiệm).

+ Với $y = 1 \Rightarrow x^2 + 1 + x = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Đáp số $(x; y) = (1; 1), (-2; 1)$.

Nhận xét: Phân tích nhân tử ở phương trình một, sau đó thế vào phương trình hai tìm nghiệm của hệ.

Ý tưởng: Đây là một bài toán rất dễ, khi ý tưởng tác giả đã cho lộ ngay từ phương trình một, vì đi từ đó ta có $x + 3y - xy = 3 \Leftrightarrow (x - 3)(1 - y) = 0$.

Xét từng trường hợp một, thế vào phương trình hai Giải phương trình: bậc hai sẽ tìm được nghiệm của hệ phương trình.

Bài toán kết thúc.



Bài tập tương tự:

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + y = xy + 2x \\ x^2 + y^2 + x + y = 4 \end{cases}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y = xy + x \\ x^2 + y^2 + x + y = 4 \end{cases}$.

13

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x^2y^2 \\ (x + y)(1 + xy) = 4x^2y^2 \end{cases}$.

■ Giải

+ Xét $x = y = 0$ là nghiệm.

+ Xét $x \neq 0; y \neq 0$ hệ Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2 \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2 & (1) \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(2 + \frac{2}{xy}\right) = 8 & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta thu được $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{1}{xy} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Nhận xét: Bài toán sử dụng phép chia các biến, sau đó kết hợp hai phương trình tìm mối liên hệ giữa hai biến để tìm nghiệm của hệ phương trình.

Ý tưởng: Quan sát thấy hệ phương trình có dáng dấp của hệ phương trình đối xứng loại hai, tức là sự xuất hiện của tổng $x + y$ và tích xy sẽ làm ta nghĩ đến phép đặt Viet là $S = x + y; P = xy$ để từ đó giải hệ hai ẩn S, P . Nhưng nếu làm như thế ta thu được hệ



$$\begin{cases} S^2 - 2P = 2P^2 \\ S(1+P) = 4P^2 \end{cases}$$
 hệ này giải bằng phương pháp thế sẽ thu được phương trình lũy thừa bậc 4 phức tạp, vì thế ta sẽ nghĩ đến phương án khác đó chính phương pháp “chia để trị”. Trước hết là xét phương trình hai, vế trái của nó xuất hiện tích đồng thời vế phải cũng xuất hiện tích số dạng $xy \cdot xy$. Do đó ta sẽ nghĩ đến việc chia một biểu thức bên vế trái cho xy và ta được như sau: $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 4$. Phương trình này chủ đạo là hai biến $\frac{1}{x}; \frac{1}{y}$ vì vậy ta cũng chia phương trình một để xuất hiện hai biến này, đó là $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2$. Và nếu đặt $\begin{cases} ax = 1 \\ by = 1 \end{cases}$ hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ (a+b)(1+ab) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ (a+b)(2+2ab) = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ (a+b)^3 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$$

Bài toán kết thúc.



Bài tập tương tự:

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2 = 27xy \\ (x^2+1)(y^2+1) = 10xy \end{cases}$.

Đáp số: $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2 \pm \sqrt{3}\right), (2; 2 \pm \sqrt{3}), \left(2 - \sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^3 + y^3)\left(1 + \frac{1}{xy}\right)^3 = 16 \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \frac{1}{xy}\right)^2 = 8 \end{cases}$.

14

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ 9xy(3x-y) + 6 = 26x^3 - 2y^3 \end{cases}$.

■ Giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ x^3 + y^3 + 6 = 27x^3 - y^3 - 9xy(3x-y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = (3x-y)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ (x+y)^3 = (3x-y)^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ x+y = 3x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ xy(x+y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$$

Vậy nghiệm của hệ là $x = y = 1$.

Nhận xét: Bài toán sử dụng phép thế hằng số từ một phương trình vào phương trình còn lại sau đó sử dụng hằng đẳng thức tìm nhân tử.



Nhắc lại kiến thức và phương pháp:

- Hằng đẳng thức bậc ba: $(ax + by)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2y + 3ab^2xy^2 + b^3y^3$.
- Phương trình dạng: $f^3(x; y) = g^3(x; y) \Leftrightarrow f(x; y) = g(x; y)$.

Ý tưởng: Ở cả hai phương trình của hệ, các biến $x; y$ đều nằm trong các biểu thức bậc 3. Và đặc biệt là cả hai phương trình cũng đều chứa hằng số. Vì vậy nếu thế hằng số này vào hằng số của phương trình kia thì rõ ràng ta sẽ thu được một phương trình bậc ba đẳng cấp của hai biến $x; y$.

Cụ thể như sau: $9xy(3x - y) + 3xy(x + y) = 26x^3 - 2y^3$ (*)

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^3 = (3x - y)^3 \Leftrightarrow x + y = 3x - y \Leftrightarrow x = y.$$

Tuy nhiên, phương trình (*) là một phương trình đẳng cấp bậc ba nếu ta chia phương trình cho y^3 , sẽ thu được một phương trình bậc ba. Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để giải quyết phương trình đó. Với $x = y$, thế ngược lại phương trình một ta sẽ tìm được nghiệm của hệ là $x = y = 1$.

Bài toán kết thúc.



Bài tập tương tự:

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y(2x + y) = 3 \\ x^2 + 4xy + 3 = 4x^2 + y^2 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (0; \pm\sqrt{3}), \left(\frac{2\sqrt{15}}{5}; -\frac{\sqrt{15}}{5}\right), \left(-\frac{2\sqrt{15}}{5}; \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x + y)(1 + xy)^4 = 32 \end{cases}$$

Đáp số: $x = y = 1$.

15

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ \sqrt{2xy - 1} + \sqrt{2 - x^2y^2} = 2 \end{cases}$$

■ **Giải**

Điều kiện: $\frac{1}{2} \leq xy \leq \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sqrt{2xy-1} + \sqrt{2-x^2y^2} &\leq \frac{2xy-1+1}{2} + \sqrt{2-x^2y^2} = \sqrt{x^2y^2} + \sqrt{2-x^2y^2} \\ &\leq 2\sqrt{\frac{x^2y^2+2-x^2y^2}{2}} = 2. \end{aligned}$$

Từ hệ suy ra $xy=1$ và thu được hệ tương đương $\begin{cases} xy=1 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow x=y=1.$

Nhận xét: Bài toán sử dụng phương pháp đánh giá phương trình hai (cụ thể là bất đẳng thức Cô-si) tìm mối quan hệ giữa các biến, sau đó thế ngược lại vào phương trình một tìm nghiệm của hệ phương trình.

Ý tưởng: Quan sát hai phương trình của hệ, ta thấy rằng phương trình hai là phương trình chứa căn thức và chỉ có một ẩn xy vì thế ta sẽ đi khai thác nó. Nhưng vấn đề là khai thác như thế nào, nếu bình phương hai vế hai lần sẽ đưa ta đến phương trình bậc bốn như vậy càng đưa về bậc cao sẽ càng khó làm. Do đó, ta sẽ nghĩ đến hướng đánh giá cụ thể ở đây là sử dụng bất đẳng thức Cô-si vì ta nhằm được nghiệm $xy=1$.

Với $xy=1$ thì $\sqrt{2xy-1}=1$ và $\sqrt{2-x^2y^2}=1$ vì vậy ta sẽ áp dụng bất đẳng thức Cô-si để dấu bằng xảy ra như sau:

$$\begin{aligned} 2xy-1+1 &\geq 2\sqrt{2xy-1} \Leftrightarrow \sqrt{2xy-1} \leq xy = \sqrt{x^2y^2} \leq \frac{x^2y^2+1}{2} \\ \Rightarrow \sqrt{2xy-1} + \sqrt{2-x^2y^2} &\leq \frac{x^2y^2+1}{2} + \frac{3-x^2y^2}{2} = 2 \Rightarrow xy=1 \end{aligned}$$

Với $xy=1$ thế vào phương trình một của hệ, ta có $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases}.$

Bài toán kết thúc.



Bài tập tương tự:

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ \sqrt{2xy-1} + \sqrt{2-x^2y^2} = 2 \end{cases}.$
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = 1 \\ \sqrt{4xy-1} + \sqrt{2-4x^2y^2} = 2 \end{cases}.$

16

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 5x - y - 3 \end{cases}.$

■ Giải

Cộng hai phương trình ta có:

$$2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+y-2)(2x-y-1) = 0.$$

$$+ \text{ TH1: } \begin{cases} x+y=2 \\ x^2-xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=1$$

$$+ \text{TH2: } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x(2x - 1) + (2x - 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (1; 1), (0; -1)$.

Nhận xét: Kết hợp giữa hai phương trình của hệ, đưa về một phương trình xét Δ chính phương, từ đó tìm mối quan hệ giữa hai biến rồi thế ngược lại một trong hai phương trình của hệ tìm nghiệm.



Nhắc lại kiến thức và phương pháp:

- Cách Giải phương trình: bậc hai tổng quát $a.t^2 + b.t + c = 0$ ($a \neq 0$).
- Đưa hệ phương trình đã cho về dạng $\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ g(x; y) = 0 \end{cases}$
- Giả sử tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x; y) + k.g(x; y) = 0$ (i). Coi phương trình (i) là phương trình bậc hai ẩn x hoặc ẩn y , sau đó xét Δ sao cho Δ là một số chính phương, từ đó sẽ tìm được $k \in \mathbb{R}$ cũng như mối quan hệ giữa $x; y$.

Ý tưởng: Hai phương trình của hệ khá tách biệt, ở phương trình một rõ ràng không thể tìm được mối quan hệ giữa $x; y$, nên ta xét phương trình hai. Nó rắc rối hơn một chút, thậm chí còn xuất hiện đầy đủ các biến số. Do đó ta thử cách xét Δ phương trình hai xem thế nào. Bây giờ coi nó là phương trình bậc hai ẩn x , ta có:

$$x^2 + 2xy - 2y^2 = 5x - y - 3 \Leftrightarrow x^2 + (2y - 5)x - 2y^2 + y + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta_x = (2y - 5)^2 + 4(2y^2 - y - 3) = 12y^2 - 24y + 13.$$

Rõ ràng Δ không thể chính phương, nên ta đã thất bại ở lối tư duy này. Vậy còn lại đó chính là cách kết hợp cả hai phương trình để đưa ra một phương trình có Δ chính phương. Ta làm như sau:

- Đưa hệ đã cho về dạng $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 - 5x + y + 3 = 0 \end{cases}$

- Giả sử tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$x^2 - xy + y^2 - 1 + k(x^2 + 2xy - 2y^2 - 5x + y + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+k)x^2 + (2yk - y - 5k)x + (1-2k)y^2 + ky + 3k - 1 = 0 \quad (i).$$

Coi (i) là phương trình bậc hai ẩn x , khi đó:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= (2ky - y - 5k)^2 - 4(k+1)[(1-2k)y^2 + ky + 3k - 1] \\ &= (12k^2 - 3)y^2 - (6k - 24k^2)y + 25k^2 - 4(k+1)(3k-1). \end{aligned}$$

Để Δ_x là một số chính phương thì trước hết hệ số của y^2 cũng phải là số chính phương, tức là chúng ta cần đi giải phương trình nghiệm nguyên $12k^2 - 3 = m^2$. Dễ dàng tìm được

$$\begin{cases} k = 1 \\ m^2 = 9 \end{cases} \text{ nên thử lại, ta sẽ có được } \Delta_x = 9y^2 - 18y + 9 = (3y - 3)^2.$$

- Vậy nên, dựa vào nghiệm của phương trình bậc hai, suy ra:

$$(i) \Leftrightarrow 2x^2 + (y-5)x - y^2 + y + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5-y+\sqrt{\Delta_x}}{4} \\ x = \frac{5-y-\sqrt{\Delta_x}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5-y+3y-3}{4} \\ x = \frac{5-y+3-3y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$$

- Từ đó thế ngược lại vào một trong hai phương trình của hệ để tìm nghiệm của hệ phương trình.

Bài toán kết thúc.



Bài tập tương tự:

1. Tìm nghiệm dương của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2x = 1 \\ 2y^2 + 2xy + 3x = y + 1 \end{cases}$

Đáp số: $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}; -\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right), \left(\frac{7-\sqrt{41}}{2}; \frac{7-\sqrt{41}}{2} \right), \left(\frac{7+\sqrt{41}}{2}; \frac{7+\sqrt{41}}{2} \right)$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)^2 + x + y = y^2 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

Đáp số: $(x; y) = (0; 0), (1; 2), (2; 2)$