CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

CHỦ ĐỀ : GÓC

- GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG
- GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG
- GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 8. GÓC TRONG KHÔNG GIAN 3
DẠNG 1. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG 3
DẠNG 2. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG 13
DẠNG 3. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG 20

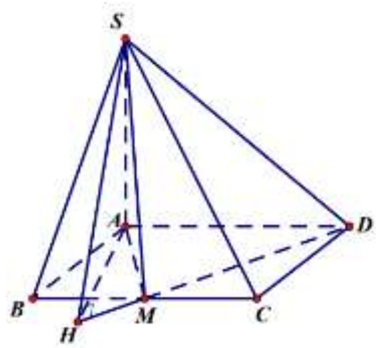
CHỦ ĐỀ 8. GÓC TRONG KHÔNG GIAN

DẠNG 1. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = AB = a$, $AD = 3a$. Gọi M là trung điểm BC. Tính cosin góc tạ bởi hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SDM)

A. $\frac{5}{7}$ **B.** $\frac{6}{7}$ **C.** $\frac{3}{7}$ **D.** $\frac{1}{7}$

Hướng dẫn giải



Kẻ $SH \perp MD, H \in MD$,

mà $SA \perp MD \Rightarrow (SAH) \perp MD \Rightarrow AH \perp MD$

Do đó $((SMD),(ABCD)) = (SH, AH) = SHA = \varphi$

Ta lại có: $S_{AMD} = \frac{1}{2}.3a.a = \frac{3a^2}{2}, MD = \sqrt{CD^2 + CM^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

$\Rightarrow AH = \frac{2S_{AMD}}{DM} = \frac{6a\sqrt{13}}{13} \Rightarrow SH = \frac{7a\sqrt{13}}{13}$

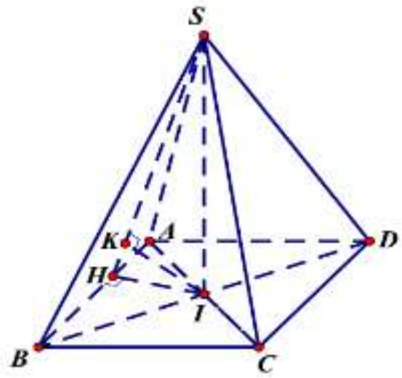
$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{AH}{SH} = \frac{6}{7}$. Vậy cosin góc giữa hai mặt phẳng (SMD) và $(ABCD)$ bằng $\frac{6}{7}$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, có $AB = 2a$ và góc $BAD = 120°$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy $(ABCD)$ trùng với giao điểm I của hai đường chéo và $SI = \frac{a}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Hướng dẫn giải



Ta có $BAD = 120° \Rightarrow BAI = 60°$

Suy ra: $\begin{cases} \sin 60° = \dfrac{BI}{AB} \\ \cos 60° = \dfrac{AI}{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BI = a\sqrt{3} \\ AI = a \end{cases}$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB. Ta có: $AB \perp (SHI) \Rightarrow AB \perp SH$

Do đó: $\varphi = (SH, IH) = SHI$

Xét tam giác vuông AIB có: $\dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{IA^2} + \dfrac{1}{IB^2} \Leftrightarrow IH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\tan SHI = \dfrac{SI}{HI} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SHI = 30°$ hay $\varphi = 30°$.

Vậy chọn đáp án A.

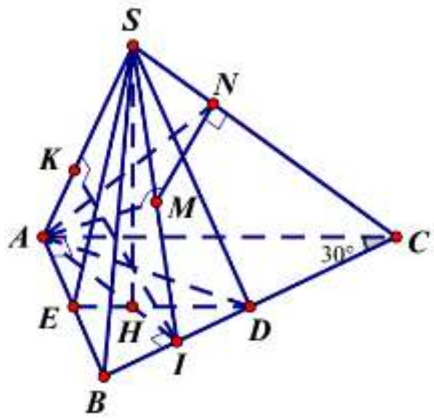
Câu 3*. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, SA = SB$ và $ACB = 30°$, $SA \perp SB$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\dfrac{3a}{4}$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC)

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{33}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{13}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{65}}{13}$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{11}$

Hướng dẫn giải

Gọi *D* là trung điểm của *BC*, suy ra tam giác *ABD* đều cạnh *a*.

Gọi *I*, *E* là trung điểm của *BD* và *AB*, *H* là giao của *AI* và *DE*. Khi đó dễ thấy *H* là trọng tâm tam giác *ABD*.



Ta có $AI \perp BC, DE \perp AB$

Vì $SA = SB \Rightarrow SE \perp AB$, suy ra $AB \perp (SDE) \Rightarrow AB \perp SH$

Khi đó ta có $SH \perp (ABC)$

Gọi *K* là hình chiếu vuông góc của *I* lên *SA*, khi đó *IK* là đoạn vuông góc chung của *SA* và *BC*.

Do đó $IK = d(SA; BC) = \frac{3a}{4}$

Đặt $SH = h, AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SA = \sqrt{\frac{a^2}{3} + h^2}$

Lại có $AI.SH = IK.SA = 2S_{SAI} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2}h = \frac{3a}{4}\sqrt{\frac{a^2}{3} + h^2} \Rightarrow h = a$

Gọi *M* là hình chiếu của *A* lên *SI*, khi đó $AM \perp (SBC)$. Gọi *N* là hình chiếu của *M* lên *SC*, khi đó $SC \perp (AMN) \Rightarrow ((SAC),(SBC)) = ANM = \varphi$

Ta có: $HI = \frac{a\sqrt{3}}{6}; SI = \frac{a\sqrt{39}}{6} \Rightarrow AM = \frac{AI.SH}{SI} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$

Mặt khác $IM = \sqrt{AI^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{39}}{26} < SI \Rightarrow SM = SI - IM = \frac{5a}{\sqrt{39}}; SC = \frac{a\sqrt{30}}{3}$

Ta lại có $\Delta SMN \sim \Delta SCI \Rightarrow \frac{MN}{CI} = \frac{SM}{SC} \Rightarrow MN = \frac{SM.CI}{SC} = \frac{3a\sqrt{130}}{52}$

$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{AM}{MN} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ hay $\cos\varphi = \frac{\sqrt{65}}{13}$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là φ với $\cos\varphi = \frac{\sqrt{65}}{13}$.

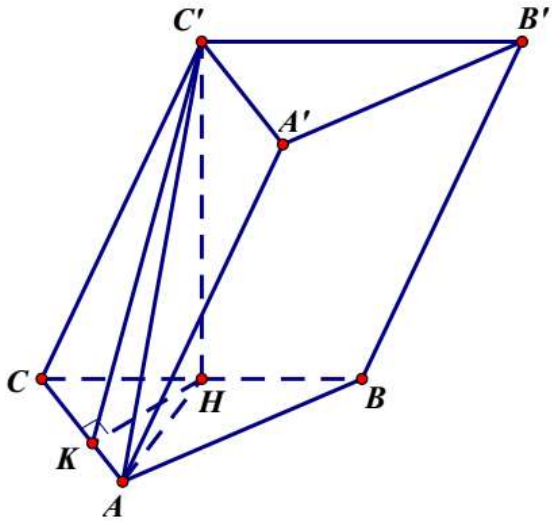
Vậy chọn đáp án C.

Câu 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a, AC = a, AA' = \frac{a\sqrt{10}}{2}, BAC = 120°$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh *BC*. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ACC'A')$

A. 75° **B.** 30° **C.** 45° **D.** 15°

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm BC. Từ giả thiết suy ra $C'H \perp (ABC)$.



Trong đó ΔABC ta có:

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC.AB.\cos 120° = 7a^2$

$\Rightarrow BC = a\sqrt{7} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow C'H = \sqrt{C'C^2 - CH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Hạ $HK \perp AC$. Vì $C'H \perp (ABC) \Rightarrow$ đường xiên $C'K \perp AC$

$\Rightarrow \left((ABC),(ACC'A')\right) = C'KH$ (1)

($\Delta C'HK$ vuông tại H nên $C'KH < 90°$)

Trong ΔHAC ta có $HK = \dfrac{2S_{HAC}}{AC} = \dfrac{S_{ABC}}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \tan C'KH = \dfrac{C'H}{HK} = 1 \Rightarrow C'KH = 45°$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\left((ABC),(ACC'A')\right) = 45°$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 5. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, và $A'A = A'B = A'C = a\sqrt{\dfrac{7}{12}}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC)

A. $75°$ **B.** $30°$ **C.** $45°$ **D.** $60°$

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của A trên (ABC)

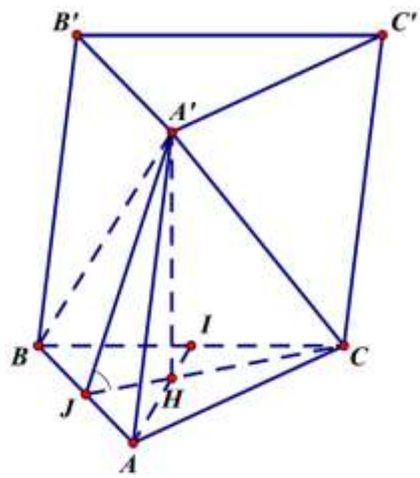
Vì $A'A = A'B = A'C$ nên $HA = HB = HC$, suy ra H là tâm của tam giác đều ABC.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AB.

$A'J = \sqrt{AA'^2 - AJ^2} = \sqrt{\dfrac{7a^2}{12} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$HJ = \dfrac{1}{3}CJ = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow A'H = \sqrt{A'J^2 - HJ^2} = \dfrac{a}{2}$



Vì $\begin{cases} A'J \perp AB \\ CJ \perp AB \end{cases} \Rightarrow (A'JC) \perp AB \Rightarrow A'JC$ chính là góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC).

Khi đó $\tan A'JC = \frac{A'H}{JH} = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow A'JC = 60^\circ$

Vậy chọn đáp án D.

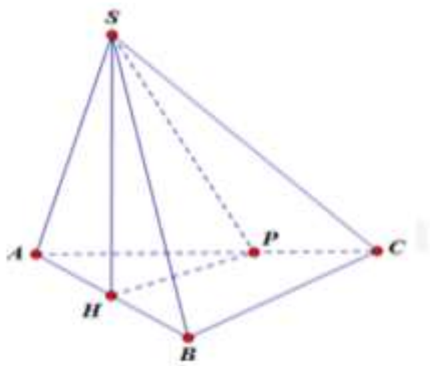
Câu 6. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B có $AB = BC = 4$. Gọi H là trung điểm của AB, $SH \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60°. Cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SAC) và (ABC) là:

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}}{4}$ **C.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$

Hướng dẫn giải

Kẻ $HP \perp AC \Rightarrow ((SAC),(ABC)) = SPH \Rightarrow \cos((SAC),(ABC)) = \cos SPH = \frac{HP}{SP}$

Ta có ngay $((SBC),(ABC)) = SBH \Rightarrow SBH = 60^\circ$



$\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{SH}{HB} = \sqrt{3} \Rightarrow SH = HB\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

ΔAPH vuông cân $P \Rightarrow HP = \frac{AH}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow SP^2 = SH^2 + HP^2 = 12 + 2 = 14 \Rightarrow SP = \sqrt{14}$

$\Rightarrow \cos((SAC),(ABC)) = \frac{HP}{SP} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 7. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a. Biết $SO \perp (ABCD), AC = a$ và thể tích khối chóp là $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. Cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (ABC) là:

A. $\frac{\sqrt{6}}{7}$ **B.** $\frac{3}{7}$ **C.** $\frac{1}{7}$ **D.** $\frac{2}{7}$

Hướng dẫn giải

Kẻ $OP \perp AB \Rightarrow ((SAB),(ABC)) = SPO$

$\Rightarrow \cos((SAB),(ABC)) = \cos SPO = \frac{OP}{SP}$

Cạnh $AB = BC = a$ và

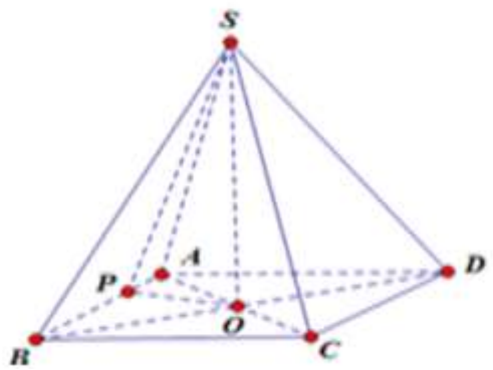
$AC = a \Rightarrow AB = BC = CA = a \Rightarrow \Delta ABC$ đều

$\Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{OP}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OP = \frac{\sqrt{3}}{2}OA = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}SO.2S_{ABC}$

$= \frac{1}{3}SO.2.\frac{1}{2}.a.a.\sin 60^\circ = SO.\frac{a^2\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow SO = 3a \Rightarrow SP^2 = SO^2 + OP^2 = 9a^2 + \frac{3a^2}{16} = \frac{147a^2}{16}$



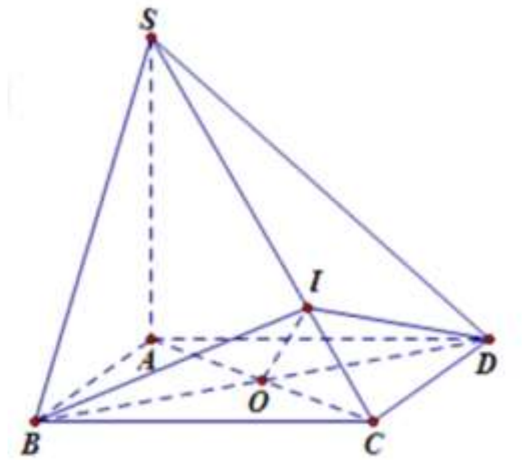
$$\Rightarrow SP=\frac{7a\sqrt{3}}{4}\Rightarrow \cos\left(\left(SAB\right),\left(ABC\right)\right)=\frac{OP}{SP}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{7a\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{7}$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 8. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O và $SA\perp\left(ABCD\right)$. Để góc giữa $\left(SBC\right)$ và $\left(SCD\right)$ bằng $60°$ thì độ dài của SA

A. a **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $a\sqrt{3}$ **D.** $2a$

Hướng dẫn giải



Ta có $\begin{cases}BD\perp AC\\ BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp\left(SAC\right)\Rightarrow BD\perp SC$

Kẻ $BI\perp SC$ ta có $\begin{cases}SC\perp SI\\ SC\perp BD\end{cases}\Rightarrow SC\perp\left(BID\right)$

$\left(\left(SBC\right),\left(SCD\right)\right)=\left(BI,ID\right)=60°$

Trường hợp 1: $BID=60°\Rightarrow BIO=30°$

Ta có $\tan BIO=\frac{BO}{IO}\Rightarrow OI=\frac{a\sqrt{6}}{2}>OC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (vô lý)

Trường hợp 2: $BID=120°\Rightarrow BIO=60°$

Ta có $\tan BIO=\frac{BO}{IO}\Rightarrow OI=\frac{a\sqrt{6}}{6}$

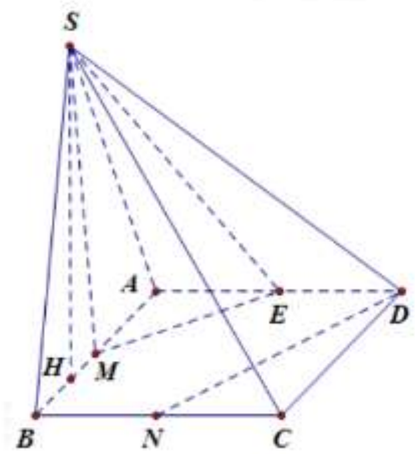
Ta có $\sin ICO = \frac{OI}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan ICO = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow SA = AC.\tan ICO = a$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a, SB = \sqrt{3}$ và (SAB) vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Cosin của góc giữa 2 đường thẳng SM và DN là:

A. $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **C.** $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Hướng dẫn giải



Kẻ ME song song với DN với $E \in AD$ suy ra $AE = \frac{a}{2}$

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng SM, DN nên $(SM, ME) = \varphi$

Gọi H là hình chiếu của S lên AB. Ta có $SH \perp (ABCD)$

Suy ra $SH \perp AD \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SA$

Do đó $SE^2 = SA^2 + AE^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow SE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ và $ME = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

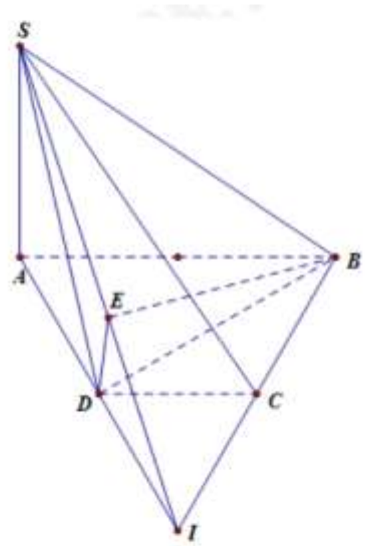
Tam giác SME cân tại E, có $\cos\alpha = \cos SME = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a, SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $ABCD$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$

Hướng dẫn giải



Gọi I là giao điểm của AD và BC

Ta có $\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SI$

Kẻ $DE \perp SI$ ta có $\begin{cases} SI \perp BD \\ SI \perp DE \end{cases} \Rightarrow SI \perp (BDE)$

$\Rightarrow ((SAD),(SBC)) = (DE, BE)$

Ta có $\sin AIS = \frac{SA}{SI} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ mà $\sin AIS = \frac{DE}{DI}$

$\Rightarrow DE = DI.\sin AIS = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\Rightarrow \tan DEB = \dfrac{BD}{ED} = \sqrt{7} \Rightarrow \cos DEB = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AB = 2a, AD = DC = a$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tan của góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là:

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

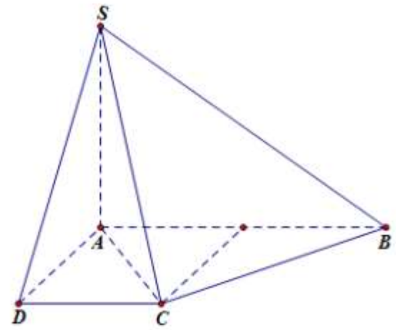
Hướng dẫn giải

Ta có $((SBC),(ABCD)) = ACS$

Ta có $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \tan ACS = \frac{SA}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy chọn đáp án D.



Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC), SA = a\sqrt{3}$. Cosin của góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (SBC) là:

A. $\frac{-2}{\sqrt{5}}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm AB

Ta có $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB) \Rightarrow CM \perp SB$

Kẻ $MN \perp SB$ ta có $\begin{cases} SB \perp MN \\ SB \perp CM \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CMN)$

$\Rightarrow ((SAB),(SBC)) = (MN, NC) = MNC$

Ta có $\tan SBA = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow SBA = 60°$

Ta có $\sin SBA = \frac{MN}{MB} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos MNC = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Vậy chọn đáp án D.

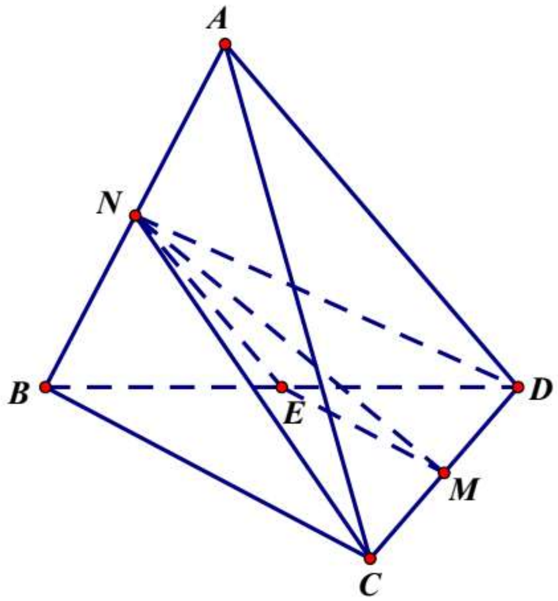
DẠNG 2. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt (ABC) và (ABD) là các tam giác đều cạnh a, các mặt (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Tính số đo của góc giữa hai mặt đường thẳng AD và BC

A. $30°$ **B.** $60°$ **C.** $90°$ **D.** $45°$

Hướng dẫn giải

Gọi M, N, E lần lượt là các trung điểm của các cạnh CD, AB, BD



Ta có: $\begin{cases} AB \perp BN \\ AB \perp CN \end{cases} \Rightarrow AB \perp \left(BCN\right) \Rightarrow AB \perp MN$

Do ΔACD cân tại $A \Rightarrow AM \perp CD$

$\Rightarrow AM \perp \left(BCD\right) \Rightarrow AM \perp BM \Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M

$\Rightarrow MN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow DM = \sqrt{ND^2 - NM^2} = \sqrt{\dfrac{3a^3}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

ΔMNE là tam giác đều $\Rightarrow MEN = 60°$

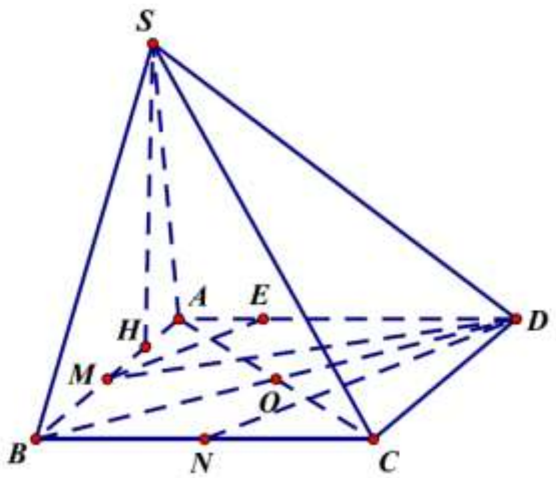
Do $\begin{cases} NE // AD \\ EM // BC \end{cases} \Rightarrow \left(AD, BC\right) = \left(NE, EM\right) = 60°$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a, SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng $\left(SAB\right)$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN

A. $\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu của S trên AB, suy ra $SH \perp \left(ABCD\right)$

Do đó SH là đường cao của hình chóp $S.BMDN$

Ta có: $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại S

$\Rightarrow SM = \dfrac{AB}{2} = a$. Kẻ $ME \parallel DN \left(E \in AD\right) \Rightarrow AE = \dfrac{a}{2}$

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng SM và DN. Ta có: $\left(SM, ME\right) = \varphi$

Theo định lý ba đường vuông góc, ta có: $SA \perp AE$

Suy ra $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}, ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

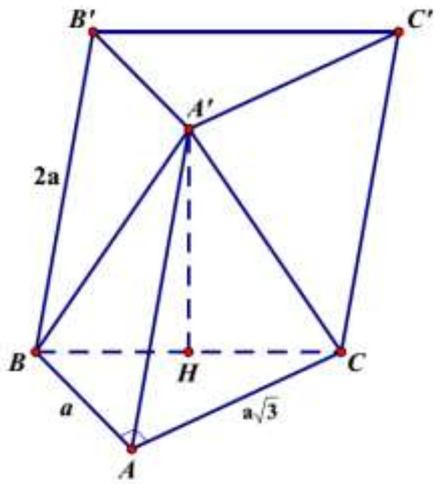
ΔSME cân tại E nên $SME = \varphi$ và $\cos\varphi = \dfrac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 3. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là trung điểm của cạnh BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $AA', B'C'$

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm của BC $\Rightarrow A'H \perp (ABC)$ và

$AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+3a^2} = a$

Do đó:

$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2 \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$

Vậy $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{3}$ (đvtt)

Trong tam giác vuông $A'B'H$ có $H'B = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$ nên tam giác $B'BH$ là cân tại B'. Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ thì $\varphi = B'BH$

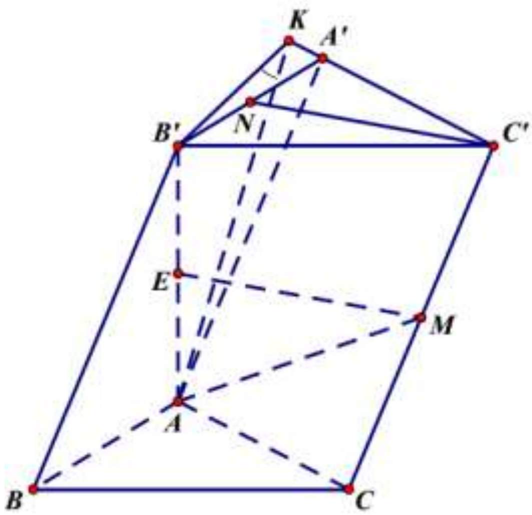
Vậy $\cos\varphi = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 4. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a, BAC = 120°$ và AB' vuông góc với đáy $(A'B'C')$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CC' và $A'B'$, mặt phẳng $(AA'C')$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30°. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AM và $C'N$

A. $\sqrt{\frac{7}{19}}$ **B.** $2\sqrt{\frac{5}{39}}$ **C.** $2\sqrt{\frac{3}{29}}$ **D.** $2\sqrt{\frac{7}{29}}$

Hướng dẫn giải



Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$

Gọi K là hình chiếu của B' lên $A'C'$, suy ra $A'C' \perp (AB'K)$

Do đó: $AKB' = ((A'B'C'),(AA'C')) = 30°$. Trong tam giác $A'KB'$ có $KA'B' = 60°, A'B' = a$ nên

$B'K = A'B'\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $AB' = B'K.\tan 30° = \frac{a}{2}$

Gọi E là trung điểm của AB', suy ra $ME \parallel C'N$ nên $(C'N, AM) = (EM, AM)$

Vì $AB' \perp C'N \Rightarrow AE \perp EM \Rightarrow (C'N, AM) = AME$

$AE = \frac{1}{2}AB' = \frac{a}{4}; EM^2 = C'N^2 = \frac{2(C'B'^2 + C'A'^2) - A'B'^2}{4} \Rightarrow EM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

$$AM^2 = AE^2 + EM^2 = \frac{29a^2}{16} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{29}}{4}$$

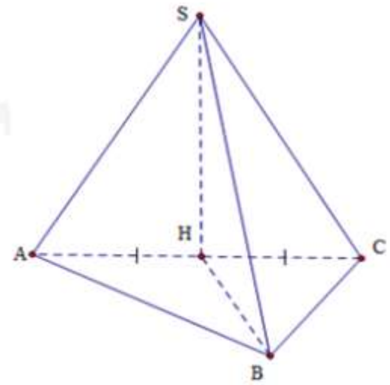
Vậy $\cos AME = \frac{ME}{MA} = 2\sqrt{\frac{7}{29}}$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a\sqrt{2}, AC = 2a$. Mặt bên SAC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Cạnh bên SA hợp với mặt đáy một góc α thỏa mãn $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{6}$. Góc giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm của AC khi đó $SH \perp AC$

Mặt khác $(SAC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Mặt khác $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2} = AB$ nên tam giác ABC vuông cân tại B do đó $BH \perp AC$.

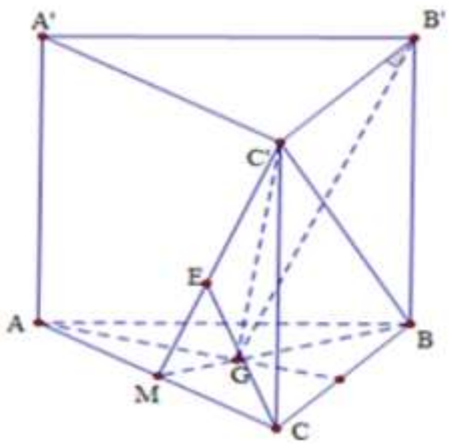
Lại có $SH \perp AC \Rightarrow AC \perp (SBH)$ do đó $SB \perp AC$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 6. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (BGC') bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau $B'G$ và BC gần bằng

A. $61,28°$ **B.** $64,28°$ **C.** $68,24°$ **D.** $52,28°$

Hướng dẫn giải



Gọi M là trung điểm của AC ta có: $BM \perp AC$

Dựng $CE \perp CC' \Rightarrow CE \perp (C'MB)$

Do đó $d(C,(BC'M)) = d(C,(BC'G)) = GE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Khi đó $\frac{1}{CE^2} = \frac{1}{CM^2} + \frac{1}{CC'^2} \Rightarrow CC' = a\sqrt{3}$

Lại có $BM = a\sqrt{3} \Rightarrow BG = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow B'G = \sqrt{BG^2 + BB'^2} = \frac{a\sqrt{39}}{3}$

Tương tự ta có $C'G = \frac{a\sqrt{39}}{3}$

Do vậy $\cos C'B'G = \frac{C'B'^2 + GB'^2 - GC'^2}{2C'B'.GB'} = \frac{3}{\sqrt{39}} \Rightarrow C'B'G \approx 61,29°$

Mặt khác $B'C' // BC \Rightarrow (BC, B'G) = (B'C', B'G) = C'B'G \approx 61,29°$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC = a$. Tính góc giữa hai đường thẳng SM và BC với M là trung điểm của AB

A. $30°$ **B.** $60°$ **C.** $90°$ **D.** $120°$

Hướng dẫn giải

Qua B kẻ đường thẳng d song song với SM

Và cắt đường thẳng SA tại N

Do đó $(SM, BC) = (BN, BC) = NBC$

Ta có $SM \parallel BN$ và M là trung điểm của AB

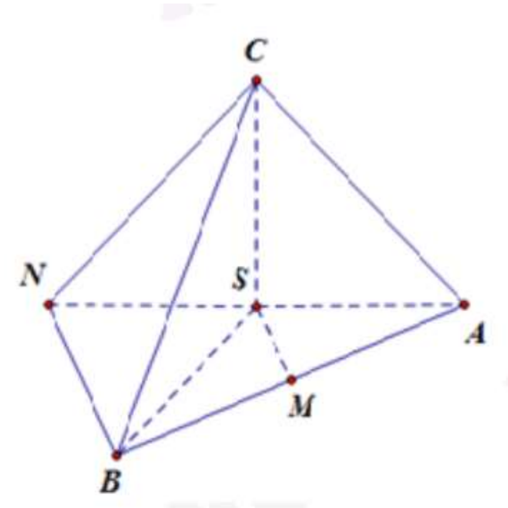
Nên $SN = SA = SC = a \Rightarrow NC = a\sqrt{2}$

$NV = 2SM = a\sqrt{2}$

Mà $BC = \sqrt{SB^2 + SC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta NBC$ là tam giác đều

Vậy $NBC = 60° \Rightarrow (SM, BC) = 60°$.

Vậy chọn đáp án B.



Câu 8. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính góc giữa hai đường thẳng CI và AC, với I là trung điểm của AB.

A. $10°$ **B.** $30°$ **C.** $150°$ **D.** $170°$

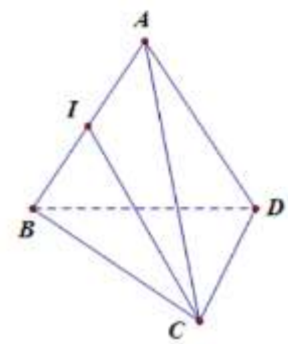
Hướng dẫn giải

Ta có I là trung điểm của AB nên $(CI, CA) = ICA$

Xét tam giác AIC vuông tại I, có $AI = \frac{AB}{2} = \frac{AC}{2} \Leftrightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{1}{2}$

Suy ra $\sin ICA = \frac{IA}{CA} = \frac{1}{2} \Rightarrow ICA = 30° \Rightarrow (CI, CA) = 30°$

Vậy chọn đáp án B.



Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Các tam giác SAB, SAD, SAC là các tam giác vuông tại A. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SC và BD biết $SA = \sqrt{3}, AB = a, AD = 3a$.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{4}{\sqrt{130}}$ **D.** $\frac{8}{\sqrt{130}}$

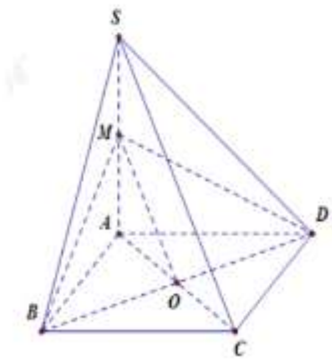
Hướng dẫn giải

Ta có các tam giác SAB, SAD, SAC là các tam giác vuông tại A.

Nên $SA \perp AB, SA \perp AD \Rightarrow SA \perp (ABCD)$

Gọi $O = AC \cap BD$. Và M là trung điểm của SA. Do đó $OM \parallel SC$

Hay $SC \parallel (MBD)$ nên $(SC, BD) = (OM, BD) = MOB$



Có $BM=\sqrt{AM^2+AB^2}=\sqrt{\frac{SA^2}{4}+AB^2}=\frac{a\sqrt{7}}{2}, MO=\frac{SC}{2}=\frac{a\sqrt{13}}{2}$

$BO=\frac{BD}{2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$. Áp dụng định lý cosin trong tam giác *MOB*.

Ta được $BM^2=OM^2+OB^2-2OM.OB.\cos MOB$

$\Leftrightarrow \cos MOB=\frac{OM^2+OB^2-BM^2}{2OM.OB}=\frac{8}{\sqrt{130}}$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 10: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *D*, *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng *SD* và *BC* biết $AD=DC=a, AB=2a$, $SA=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

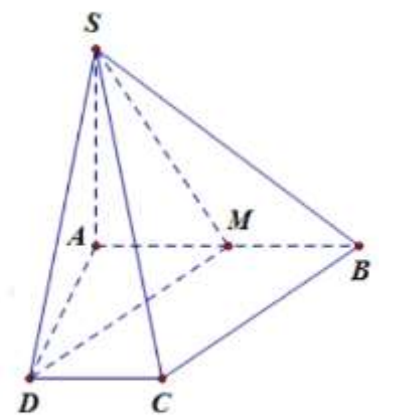
A. $\frac{1}{\sqrt{42}}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{42}}$ **C.** $\frac{3}{\sqrt{42}}$ **D.** $\frac{4}{\sqrt{42}}$

Hướng dẫn giải

Gọi *M* là trung điểm của *AB*. Ta có $AM=AD=DC=a$

Mà *AB* song song với *CD* nên *AMCD* là hình vuông cạnh *A*.

Do đó *DM* song song với *BC*. Suy ra $(SD,BC)=(SD,DM)=SDM$



Lại có $SM=\sqrt{SA^2+AM^2}=\frac{a\sqrt{21}}{3}$

Và $DM=a\sqrt{2}, SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=\frac{a\sqrt{21}}{3}$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác *SDM*, ta được

$\cos SDM=\frac{SD^2+DM^2-SM^2}{2SD.SM}=\frac{3}{\sqrt{42}}$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 11. Cho tứ diện đều *ABCD* cạnh *a*. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng *AB* và *CI* với *I* là trung điểm của *AD*.

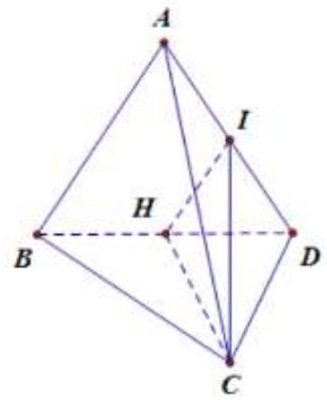
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi *H* là trung điểm của *BD*. Ta có $IH \parallel AB \Rightarrow AB \parallel (HIC)$

Nên $(AB,CI)=(IH,IC)=HIC$. Mà $IH=\frac{a}{2}, CH=CI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác *HIC*, ta được



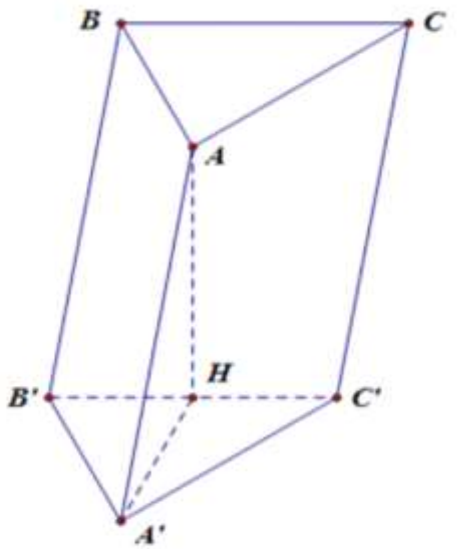
$$\cos HIC = \frac{HI^2 + CI^2 - HC^2}{2HI.CI} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \cos(AB, CI) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 12. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đáy bằng a. Biết góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là 60° và H là hình chiếu của đỉnh A lên mặt phẳng $(A'B'C')$, H trùng với trung điểm của cạnh $B'C'$. Góc giữa BC và AC' là α. Giá trị của $\tan\alpha$ là:

A. 3 **B.** -3 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{-1}{3}$

Hướng dẫn giải



Ta có $A'H$ là hình chiếu của AA' lên mặt phẳng đáy

Do đó $(AA',(ABC)) = (AA', A'H) = AA'H = 60°$

Lại có $A'H = \frac{a}{2} \Rightarrow AH.\tan 60°.\frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = B'H$ nên $AB' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Và $AA' = \frac{A'H}{\cos 60°} = a \Rightarrow AC' = a$

Mặt khác $(BC, AC') = (AC', B'C') = AC'B' = \alpha$

Do đó $\cos\alpha = \frac{AC'^2 + B'C'^2 - AB'^2}{2.AC'.B'C'} = \frac{1}{4}$

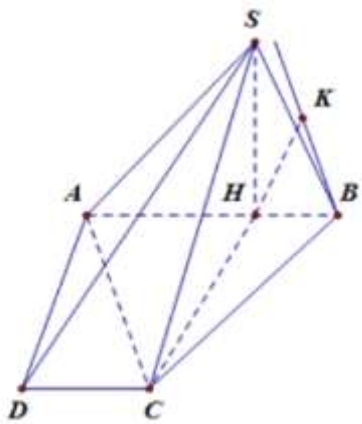
Suy ra $\tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = 3$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại AD, với $AB = 3a, AD = 2a, DC = a$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ là H thuộc AB với $AH = 2HB$. Biết $SH = 2a$, cosin của góc giữa SB và AC là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{-1}{5}$

Hướng dẫn giải



Qua B kẻ đường thẳng d song song với AC và cắt CH tại K

Ta có $(SB, AC) = (SB, BK) = SBK = \varphi$

Xét hai tam giác đồng dạng ACH và BKH có $\frac{CH}{HK} = \frac{AH}{BH} = 2$

Nên $HK = \frac{CH}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} = BK \Rightarrow \begin{cases} SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = a\sqrt{5} \\ SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = \frac{a\sqrt{21}}{2} \end{cases}$

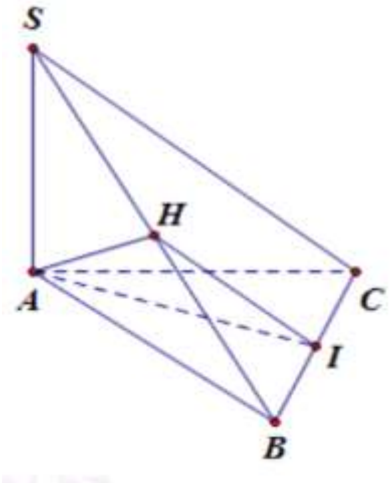
Do đó $\cos SBK=\cos\varphi=\dfrac{SB^2+BK^2-SK^2}{2.SB.BK}=\dfrac{1}{5}$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 14. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B*, *SA* vuông góc với đáy. Biết $SA=a$; $AB=a$; $BC=a\sqrt{2}$. Gọi *I* là trung điểm của *BC*. Cosin của góc giữa 2 đường thẳng *AI* và *SC* là:

A. $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ **B.** $-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

Hướng dẫn giải



Gọi *H* là trung điểm của $SB\Rightarrow IH$ song song với *SC*.

Do đó $SC\parallel(AHI)\Rightarrow(AI,SC)=(AI,HI)=AIH$

Ta có $AI=\sqrt{AB^2+BI^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và $IH=\dfrac{SC}{2}=\dfrac{\sqrt{SA^2+AC^2}}{2}=a$

$AH=\sqrt{\dfrac{AB^2+AS^2}{2}-\dfrac{BS^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác *AHI*, có

$\cos AIH=\dfrac{AI^2+HI^2-AH^2}{2AI.AH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

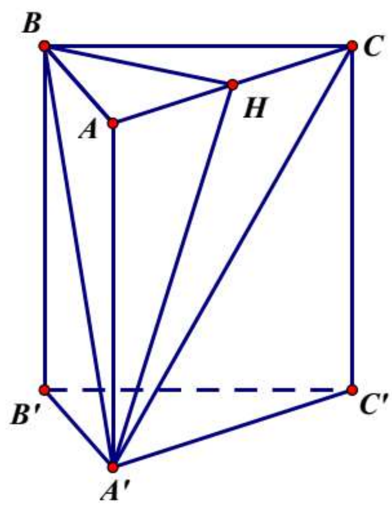
Vậy chọn đáp án A.

DẠNG 3. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Câu 1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy *ABC* là tam giác cân tại *A*, $BC=a, AA'=a\sqrt{2}$ và $\cos BA'C=\dfrac{5}{6}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Hướng dẫn giải



Đặt $AB=x$ thì $A'B^2=A'C^2=x^2+2a^2$

Áp dụng định lý hàm số cosin trong $\Delta A'BC$, ta có:

$\cos BA'C=\dfrac{A'B^2+A'C^2-BC^2}{2A'B.A'C}\Leftrightarrow\dfrac{2x^2+4a^2-a^2}{2(x^2+2a^2)}=\dfrac{5}{6}\Leftrightarrow x=a$

Kẻ $BH\perp AC$, khi đó $BH\perp(AA'C'C)$

Suy ra góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ là góc $BA'H$. Trong tam giác vuông $A'BH$ có

$\sin BA'H=\dfrac{BH}{A'B}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow BA'H=30°$

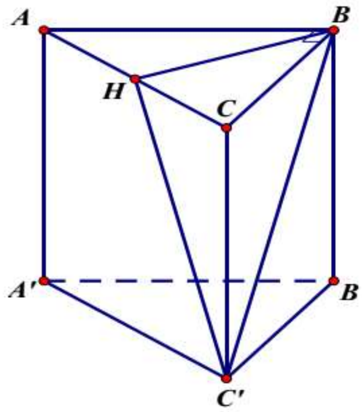
Vậy chọn đáp án A.

Câu 2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $AB=3cm, BC'=3\sqrt{2}cm$. Tính góc hợp bởi đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$

A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $30°$

Hướng dẫn giải

Tính góc hợp bởi đường thẳng BC, và mặt phẳng $(ACC'A')$



Gọi H là trung điểm của cạnh AC, suy ra HC' là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng $(ACC'A')$

Do đó $(BC',(ACC'A'))=(BC',HC')$

Ta có tam giác BHC' vuông tại H, cạnh $BH=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}cm$

Ta có $\sin HC'B=\dfrac{BH}{BC'}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow HC'B=30°$. Vậy $(BC',(ACC'A'))=30°$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng 60°.

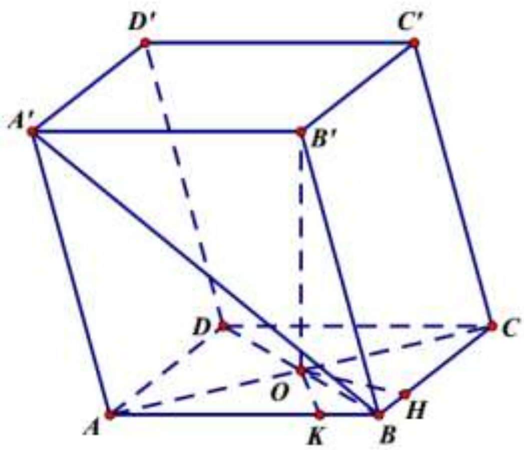
Vậy chọn đáp án B.

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc A = 60°. Chân đường vuông góc hạ từ B' xuống mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của hai đường chéo của đáy $ABCD$. Cho $BB'=a$. Tính góc giữa cạnh bên và đáy

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Hướng dẫn giải

Tính góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy.



Gọi $O=AC\cap BD$. Theo giả thiết ta có $B'O\perp(ABCD)$

$$\begin{cases} B'B\cap(ABCD)=\{B\} \\ B'O\perp(ABCD), O\in(ABCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hình chiếu $B'B$ trên $(ABCD)$ là OB

$\Rightarrow (B'B,(ABCD))=(B'B,BO)=B'BO$. Tam giác ABD có $AB=AD=a, BAD=60°\Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác đều $\Rightarrow OB=\dfrac{a}{2}$

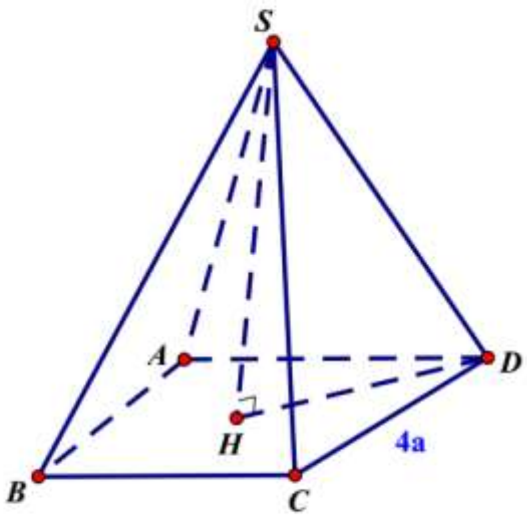
Trong tam giác vuông $B'OB$: $\cos B'OB=\dfrac{OB}{BB'}=\dfrac{\frac{a}{2}}{a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow B'OB=60°$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $4a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Tam giác SAB có diện tích bằng $\dfrac{8a^2\sqrt{6}}{3}$. Côsin của góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) bằng:

A. $\frac{\sqrt{19}}{5}$ **B.** $\frac{\sqrt{6}}{5}$ **C.** $\frac{6}{25}$ **D.** $\frac{19}{25}$

Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên mặt phẳng (SBC)

$\Rightarrow (SD,(SBC)) = HSD \Rightarrow \cos(SD,(SBC)) = \cos HSD = \frac{SH}{SD}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}SA.AB = \frac{1}{2}SA.4a = \frac{8a^2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SA = \frac{4a\sqrt{6}}{3}$

$V_{D.SBC} = \frac{1}{3}DH.S_{SBC}$ và

$V_{D.SBC} = V_{S.BCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{BCD} = \frac{1}{3}.\frac{4a\sqrt{6}}{3}.\frac{1}{2}.4a.4a = \frac{32a^3\sqrt{6}}{9}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}DH.S_{SBC} = \frac{32a^3\sqrt{6}}{9} \Rightarrow DH = \frac{32a^3\sqrt{6}}{3S_{SBC}}$

Từ $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow S_{SBC} = \frac{1}{2}BC.SB = \frac{1}{2}.4a.SB = 2a.SB$

$SB^2 = SA^2 + AB^2 = \left(\frac{4a\sqrt{6}}{3}\right)^2 + 16a^2 = \frac{80a^2}{3} \Rightarrow SB = a\sqrt{\frac{80}{3}} \Rightarrow S_{SBC} = 2a^2\sqrt{\frac{80}{3}}$

Thế vào (1) $\Rightarrow DH = \frac{32a^3\sqrt{6}}{3.2a^2\sqrt{\frac{80}{3}}} = \frac{4a\sqrt{10}}{5}$

$SD^2 = SA^2 + AD^2 = \left(\frac{4a\sqrt{6}}{3}\right)^2 + 16a^2 = \frac{80a^2}{3} \Rightarrow SD = a\sqrt{\frac{80}{3}}$

$\Rightarrow SH^2 = SD^2 - HD^2 = \frac{80a^2}{3} - \left(\frac{4a\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{304a^2}{15}$

$\Rightarrow SA = a\sqrt{\frac{304}{15}} \Rightarrow \cos(SD,(SBC)) = \frac{SH}{SD} = \frac{a\sqrt{\frac{304}{15}}}{a\sqrt{\frac{80}{3}}} = \frac{\sqrt{19}}{5}$

Chọn A.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $CD = 2a, AD = AB = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm H của đoạn AB. Khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. Tan của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SCD) bằng:

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $2\sqrt{2}$

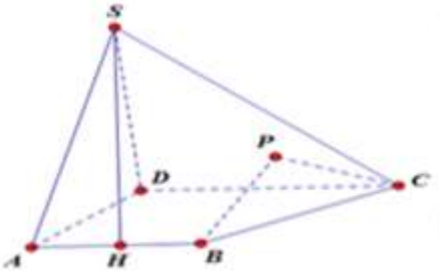
Hướng dẫn giải

Gọi P là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (SCD)

$$\Rightarrow (BC,(SCD)) = BCP \Rightarrow \tan(BC,(SCD)) = \tan BCP = \frac{BP}{PC}$$

$$AB//CD \Rightarrow AB//(SCD) \Rightarrow d(H,(SCD)) = d(B,(SCD)) = BP \Rightarrow BP = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Ta có $BC^2 = AD^2 + (CD - AB)^2 = a^2 + (2a - a)^2 = 2a^2$



$$\Rightarrow PC^2 = BC^2 - BP^2 = 2a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{16a^2}{9}$$

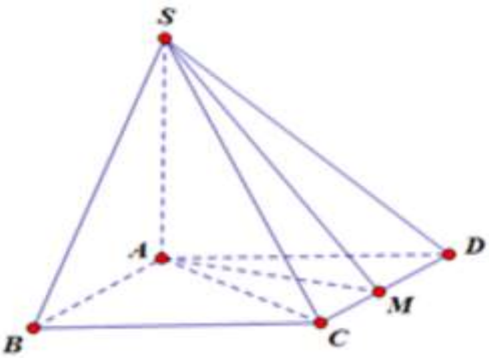
$$\Rightarrow PC = \frac{4a}{3} \Rightarrow \tan(BC,(SCD)) = \frac{BP}{PC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{3}}{\frac{4a}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a; AD = 2a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của CD, biết SC tạo với đáy góc $45°$. Cosin góc tạo bởi đường thẳng SM và mặt phẳng $(ABCD)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{13}$ **B.** $\frac{\sqrt{13}}{29}$ **C.** $\frac{\sqrt{377}}{29}$ **D.** $\frac{\sqrt{277}}{29}$

Hướng dẫn giải



Từ $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SM,(ABCD)) = SMA \Rightarrow \cos(SM,(ABCD)) = \cos SMA = \frac{AM}{SM}$

Từ $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC,(ABCD)) = SCA \Rightarrow SCA = 45° \Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại A

$$\Rightarrow SA = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + 12a^2} = 4a$$

$$\Rightarrow SM^2 = SA^2 + AM^2 = 16a^2 + 13a^2 = 29a^2 \Rightarrow SM = a\sqrt{29}$$

$\Rightarrow \cos(SM,(ABCD)) = \frac{AM}{SM} = \frac{a\sqrt{13}}{a\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{377}}{29}$. **Vậy chọn đáp án C**

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B có $AB = BC = a; SA \perp (ABC)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$ .Cosin góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là:

A. $\frac{\sqrt{10}}{15}$ **B.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$ **C.** $\frac{\sqrt{10}}{20}$ **D.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$

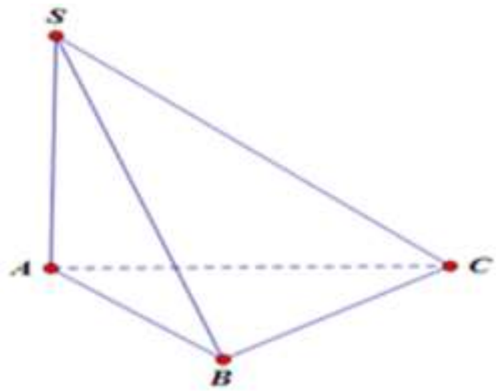
Hướng dẫn giải

Từ $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SC,(ABC)) = SCA \Rightarrow \cos(SC,(ABC)) = \cos SCA = \frac{AC}{SC}$

ΔABC vuông cân $B \Rightarrow AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

+ Ta có ngay

$(SB,(ABC)) = SBA \Rightarrow SBA = 60° \Rightarrow \tan 60° = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$



$\Rightarrow SC^2 = SA^2 + AC^2 = 3a^2 + 2a^2 = 5a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow \cos(SC,(ABC)) = \frac{AC}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{10}}{5}$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 8. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a\sqrt{3}, BC = a$. Biết $A'C = 3a$. Cosin góc tạo bởi đường thẳng $A'B$ và mặt đáy (ABC) là:

A. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ **B.** $\frac{\sqrt{10}}{6}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$

Hướng dẫn giải

Lăng trụ đứng $A'B'C'.ABC \Rightarrow A'A \perp (ABC)$

$\Rightarrow (A'B,(ABC)) = A'BA \Rightarrow \cos(A'B,(ABC)) = \cos A'BA = \frac{AB}{A'B}$

ΔABC vuông tại $B \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2 \Rightarrow AC = 2a$

$\Rightarrow A'A^2 = A'C^2 - AC^2 = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2$

$\Rightarrow A'B^2 = A'A^2 + AB^2 + 5a^2 + 3a^2 = 8a^2 \Rightarrow A'B = 2a\sqrt{2}$

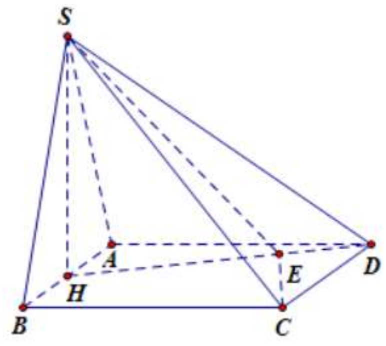
$\Rightarrow \cos(A'B,(ABC)) = \cos A'BA = \frac{AB}{A'B} = \frac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. **Vậy chọn đáp án C.**

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Cosin của góc giữa SC và mặt phẳng (SHD) là

A. $\sqrt{\frac{3}{5}}$ **B.** $\sqrt{\frac{5}{3}}$ **C.** $\sqrt{\frac{2}{5}}$ **D.** $\sqrt{\frac{5}{2}}$

Hướng dẫn giải

Ta có $SB^2 + BC^2 = SC^2 = 2a^2 \Rightarrow SB \perp BC$ mà $BC \perp AB$



$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SH$ mà $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Kẻ $CE \perp HD \Rightarrow CE \perp (SHD) \Rightarrow (SC,(SHD)) = (SC,SE) = CSE$

Ta có $\frac{1}{2}CE.HD = \frac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow CE = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$

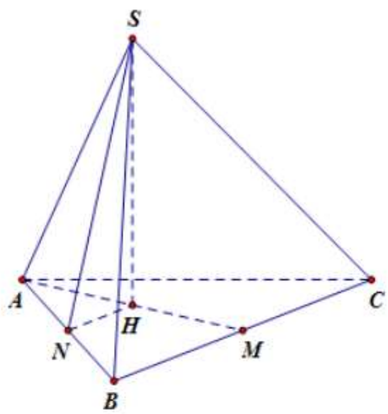
$\Rightarrow SE = \sqrt{SC^2 - CE^2} = \frac{a\sqrt{30}}{5} \Rightarrow \cos CSE = \frac{SE}{SC} = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 10. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A có $AB = AC = 4a$, góc $BAC = 120°$. Gọi M là trung điểm của BC, N là trung điểm của AB, ΔSAM là tam giác cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa SN và mặt phẳng (ABC) là:

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Hướng dẫn giải



Ta có $(SN,(ABC)) = (SN,NH) = SNH$

Ta có $MAC = 60° \Rightarrow AM = 2a, MC = 2a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}AM = a \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a$

Ta có $NH = \frac{1}{2}BM = a\sqrt{3}$

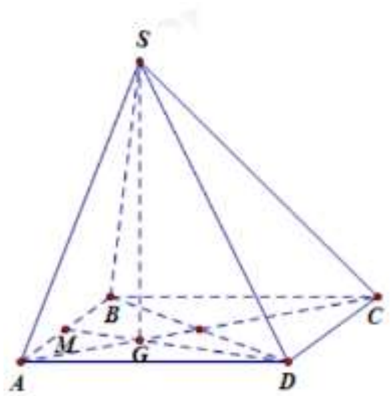
$\Rightarrow \tan SNH = \frac{SH}{NH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SNH = 30° \Rightarrow (SN,(ABC)) = 30°$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ là trọng tâm G của ΔABD. Biết $SG = 2a$, cosin của góc giữa SD và $(ABCD)$ là:

A. $\sqrt{\frac{5}{21}}$ **B.** $-\sqrt{\frac{5}{21}}$ **C.** $\sqrt{\frac{5}{41}}$ **D.** $-\sqrt{\frac{5}{41}}$

Hướng dẫn giải



Ta có $(SD,(ABCD)) = (SD,GD) = SDG$

Ta có $DG = \frac{2}{3}DM = \frac{2}{3}\sqrt{AM^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$

$\Rightarrow \tan SDG = \frac{SG}{GD} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

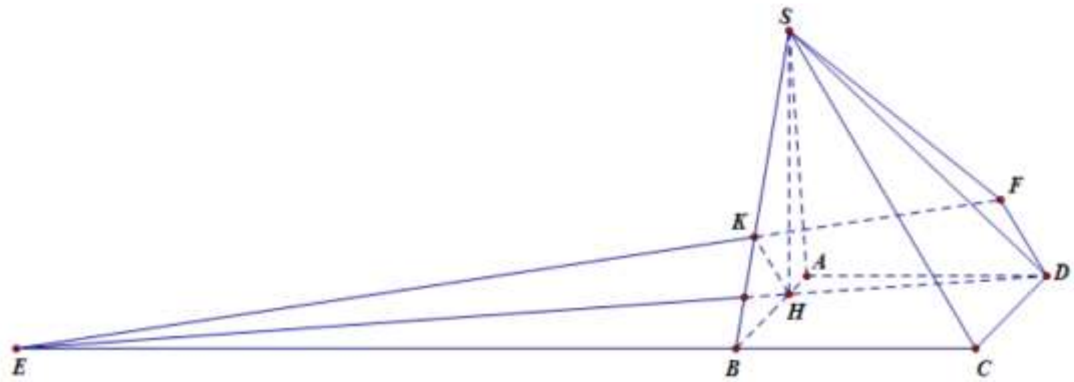
$\Rightarrow \cos SDG = \sqrt{\frac{5}{41}} \Rightarrow \cos(SD,(ABCD)) = \sqrt{\frac{5}{41}}$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a, AD = a\sqrt{3}$. Điểm H nằm trên cạnh AB thỏa mãn $AH = \frac{1}{3}HB$. Hai mặt phẳng (SHC) và (SHD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA = a\sqrt{5}$. Cosin của góc giữa SD và (SBC) là:

A. $\sqrt{\frac{5}{12}}$ **B.** $\sqrt{\frac{5}{13}}$ **C.** $\sqrt{\frac{4}{13}}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải



Kẻ $HE \perp SB \Rightarrow HK \perp (SBC)$. Gọi $E = DH \cap BC$, kẻ $DF // HK \left(F \in EK\right)$

$\Rightarrow DF \perp (SBC) \Rightarrow (SD,(SBC)) = (SD, SF) = DSF$

Ta có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 2a$. Xét ΔSHB có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{13}{36a^2} \Rightarrow HK = \frac{6a}{\sqrt{13}}$

Ta có $\frac{EH}{ED} = \frac{HB}{CD} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{HK}{CF} = \frac{EH}{ED} = \frac{3}{4} \Rightarrow DF = \frac{8a}{\sqrt{13}}$. Ta có $SD = \sqrt{SH^2 + DH^2} = 2a\sqrt{2}$

$\Rightarrow SF = \sqrt{SD^2 - DF^2} = \frac{2a\sqrt{10}}{\sqrt{13}} \Rightarrow \cos DSF = \frac{SF}{SD} = \sqrt{\frac{5}{13}}$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 13. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết SC tạo với đáy một góc $60°$, gọi M là trung điểm của BC. Cosin góc tạo với SM và mặt đáy là:

A. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$ **C.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$

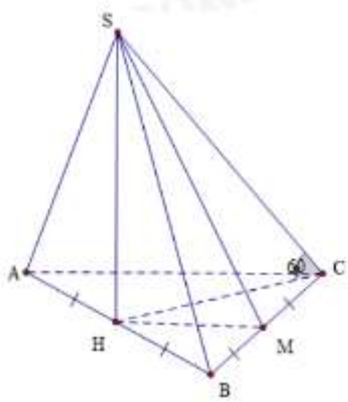
Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm của AB khi đó $SH \perp AB$

Mặt khác $(SAB) \perp (ABC)$ suy ra $SH \perp (ABC)$

Khi đó $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = CH \tan 60° = \frac{3a}{2}$

Do M là trung điểm của BC nên $HM = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$



$$\cos SMH = \frac{HM}{\sqrt{HM^2 + SH^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Vậy chọn đáp án B.