

HÌNH HỌC 12

CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ VỀ HÌNH HỌC ĐỂ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC 12

I. TỈ SỐ GÓC NHỌN TRONG TAM GIÁC VUÔNG

$$1. \sin \alpha = \frac{AB}{BC} \text{ (ĐỐI chia HUYỀN)} \quad 2. \cos \alpha = \frac{AC}{BC} \text{ (KÈ chia HUYỀN)}$$

$$3. \tan \alpha = \frac{AB}{AC} \text{ (ĐỐI chia KÈ)} \quad 4. \cot \alpha = \frac{AC}{AB} \text{ (KÈ chia ĐỐI)}$$

II. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

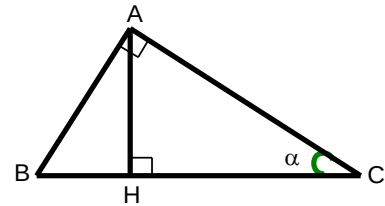
$$1. BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ (Định lý Pitago)} \Rightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2$$

$$2. AB^2 = BH \cdot BC \quad 3. AC^2 = CH \cdot BC$$

$$4. AH^2 = BH \cdot CH$$

$$5. AB \cdot AC = BC \cdot AH$$

$$6. \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$



III. ĐỊNH LÝ CÔSIN

$$1. a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA \quad 2. b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB \quad 3. c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$$

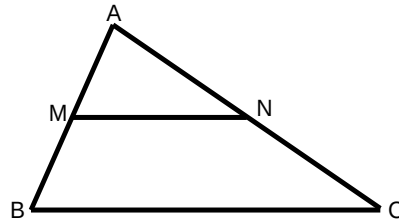
IV. ĐỊNH LÝ SIN

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

V. ĐỊNH LÝ TALET

$$MN \parallel BC$$

$$a) \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}; \quad b) \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$



VI. DIỆN TÍCH TRONG HÌNH PHẪNG

1. Tam giác thường:

$$a) S = \frac{1}{2}ah \quad b) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (Công thức Hê-rông)}$$

$$c) S = pr \text{ (r: bk đ.tròn nội tiếp tam giác)}$$

$$2. \text{ Tam giác đều cạnh } a: \quad a) \text{ Đường cao: } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad b) S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

c) Đường cao cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực

$$3. \text{ Tam giác vuông: } a) S = \frac{1}{2}ab \text{ (a, b là 2 cạnh góc vuông)}$$

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của **cạnh huyền**

4. Tam giác vuông cân (nửa hình vuông):

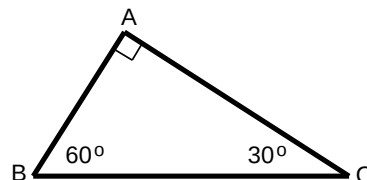
$$a) S = \frac{1}{2}a^2 \text{ (2 cạnh góc vuông bằng nhau)}$$

$$b) \text{ Cạnh huyền bằng } a\sqrt{2}$$

5. Nửa tam giác đều:

a) Là tam giác vuông có một góc bằng 30° hoặc 60°

$$b) BC = 2AB \quad c) AC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad d) S = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$



$$6. \text{ Tam giác cân: } a) S = \frac{1}{2}ah \text{ (h: đường cao; a: cạnh đáy)}$$

b) Đường cao hạ từ đỉnh cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực

7. **Hình chữ nhật:** $S = ab$ (a, b là các kích thước)

$$8. \text{ Hình thoi: } S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \text{ (d}_1, d_2 \text{ là 2 đường chéo)}$$

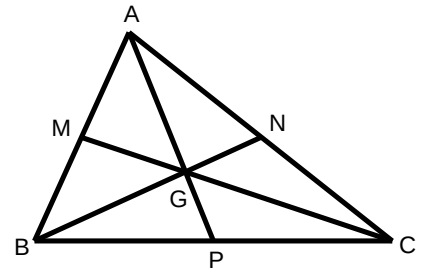
9. **Hình vuông:** a) $S = a^2$ b) Đường chéo bằng $a\sqrt{2}$
 10. **Hình bình hành:** $S = ah$ (h: đường cao; a: cạnh đáy)
 11. **Đường tròn:** a) $C = 2\pi R$ (R: bán kính đường tròn)
 b) $S = \pi R^2$ (R: bán kính đường tròn)

VII. CÁC ĐƯỜNG TRONG TAM GIÁC

1. **Đường trung tuyến:** G: là trọng tâm của tam giác

a) Giao điểm của 3 đường trung tuyến của tam giác gọi là **trọng tâm**

b) $* BG = \frac{2}{3} BN$; $* BG = 2GN$; $* GN = \frac{1}{3} BN$



2. **Đường cao:** Giao điểm của 3 đường cao của tam giác gọi là **trực tâm**

3. **Đường trung trực:** Giao điểm của 3 đường trung trực của tam giác là **tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác**

4. **Đường phân giác:** Giao điểm của 3 đường phân giác của tam giác là **tâm đường tròn nội tiếp tam giác**

VIII. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1. **Hình tứ diện đều:** Có 4 mặt là các tam giác đều bằng nhau.

Chân đường cao trùng với **tâm** của đáy (hay trùng với **trọng tâm** của tam giác đáy).

Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau

2. **Hình chóp đều:** Có đáy là đa giác đều. Có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Chân đường cao trùng với **tâm** của đa giác đáy. Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau

3. **Đường thẳng d vuông góc với mp(α):**

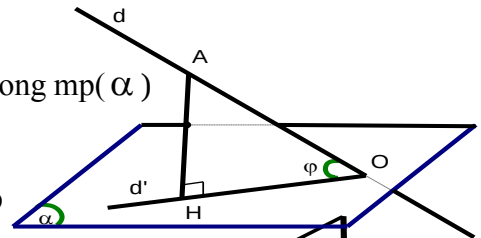
a) Đt d vuông góc với 2 đt cắt nhau cùng nằm trên mp(α) Tức là:
$$\begin{cases} d \perp a; d \perp b \\ a \cap b \\ a, b \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$$

b)
$$\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = a \Rightarrow d \perp (\alpha) \\ a \perp d \subset (\beta) \end{cases}$$

c) Đt d vuông góc với mp(α) thì d vuông góc với mọi đt nằm trong mp(α)

4. **Góc φ giữa đt d và mp(α):** d cắt (α) tại O và $A \in d$

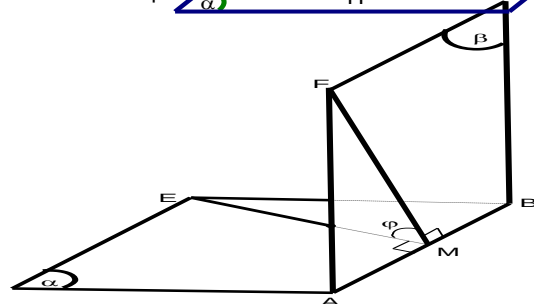
Nếu $\begin{cases} AH \perp (\alpha) \\ H \in (\alpha) \end{cases}$ thì góc giữa d và (α) là φ hay $\widehat{AOH} = \varphi$



5. **Góc giữa 2 mp(α) và mp(β):**

Nếu $\begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = AB \\ FM \perp AB; EM \perp AB \\ EM \subset (\alpha), FM \subset (\beta) \end{cases}$

thì góc giữa (α) và (β) là φ hay $\widehat{EMF} = \varphi$



6. **Khoảng cách từ điểm A đến mp(α):**

Nếu $AH \perp (\alpha)$ thì $d(A, (\alpha)) = AH$ (với $H \in (\alpha)$)

IX. KHỐI ĐA DIỆN:

1. **Thể tích khối lăng trụ:**

$V = Bh$ (B: diện tích đáy; h: chiều cao)

2. **Thể tích khối chóp:**

$V = \frac{1}{3} Bh$ (diện tích đáy là đa giác)

3. **Tỉ số thể tích của khối chóp:**

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

4. **Diện tích xq của hình nón tròn xoay:**

$$S_{xq} = \pi Rl \quad (R: \text{bk đường tròn}; l: \text{đường sinh})$$

5. **Thể tích của khối nón tròn xoay:**

$$V = \frac{1}{3} Bh \quad (\text{diện tích đáy là đường tròn})$$

6. **Diện tích xq của hình trụ tròn xoay:**

$$S_{xq} = 2\pi Rl \quad (R: \text{bk đường tròn}; l: \text{đường sinh})$$

7. **Thể tích của khối trụ tròn xoay:**

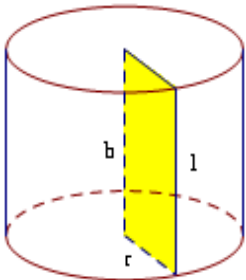
$$V = Bh = \pi R^2 h \quad (h: \text{chiều cao khối trụ})$$

8. **Diện tích của mặt cầu:**

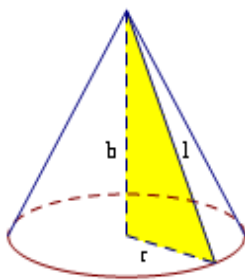
$$S = 4\pi R^2 \quad (R: \text{bk mặt cầu})$$

9. **Thể tích của khối nón tròn xoay:**

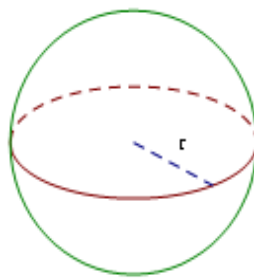
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (R: \text{bán kính mặt cầu})$$



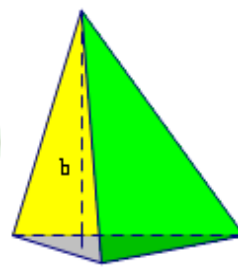
Hình trụ



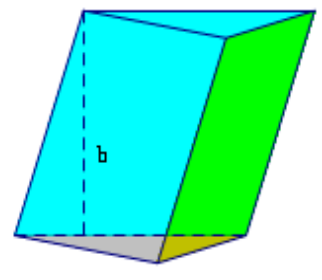
Hình nón



Hình cầu



Hình chóp



Hình lăng trụ

PHẦN: HÌNH HỌC TRONG KHÔNG GIAN

§. Trong không gian với hệ trục Oxyz cho

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \quad \text{và } k \in \mathbb{R}$$

Ta có:

1) $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$

2) $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$

3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

4) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

5) Tích có hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2a_3 \\ b_2b_3 \\ a_3a_1 \\ b_3b_1 \\ a_1a_2 \\ b_1b_2 \end{pmatrix}$$

6) $|\vec{a}, \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$

7) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

8) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$

9) $\vec{a} \perp [\vec{a}, \vec{b}]$ hay $\vec{b} \perp [\vec{a}, \vec{b}]$

10) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$

11) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

↑ Ứng dụng của vector:

• $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$

• $V_{\text{Hộp } ABCD.A'B'C'D'} = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'}|$

• $V_{\text{Tứ diện } ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$

II. TOA ĐỘ ĐIỂM:

Tro trong không gian Oxyz cho $A(x_A; y_A; z_A)$
 $B(x_B; y_B; z_B)$

1) $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

2) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

3) G là trọng tâm ΔABC , ta có:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$$

4) G là trọng tâm tứ diện ABCD

$$\Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$$

5) Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k. Ta có:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y = \frac{y_A - ky_B}{1 - k} \end{cases}, k \neq 1$$

6) I là trung điểm của đoạn AB thì:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

III. MẶT PHẪNG:

1) Giả sử mp (α) có cặp VTCP là:

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$$

Nên có VTPT là:

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2a_3 \\ b_2b_3 \\ a_3a_1 \\ b_3b_1 \\ a_1a_2 \\ b_1b_2 \end{pmatrix}$$

2) Phương trình tổng quát của mp (α) có dạng:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$; trong đó

$\vec{n} = (A; B; C)$ là VTPT của mp (α)

3) Phương trình các mặt phẳng toạ độ:

- ♦ (Oxy) : $z = 0$; (Ozy) : $x = 0$
- ♦ (Oxz) : $y = 0$
- 4) Chùm mặt phẳng: Cho hai mặt phẳng cắt nhau: $((\alpha_1)) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

P.tr của chùm mp xác định bởi (α_1) và (α_2) là:
 $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

5) Các vấn đề viết phương trình mặt phẳng:

Vấn Đề 1: Viết phương trình mặt phẳng

P.Pháp:

- Tìm VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$ và điểm đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$
- dạng:
 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Vấn Đề 2: Viết phương trình mặt phẳng qua ba điểm A, B, C

P.Pháp:

- Tính $\vec{AB}, \vec{AC}$
- Mp (ABC) có VTPT là
 $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}]$ và qua A
- Kết luận.

Vấn Đề 3: Viết phương trình mp (α) đi qua điểm A và vuông góc BC

P.Pháp:

Mp $(\alpha) \perp BC$. Nên có VTPT là BC qua A

Chú ý:

- Trục Ox chứa $\vec{i} = (1; 0; 0)$
- Trục Oy chứa $\vec{j} = (0; 1; 0)$
- Trục Oz chứa $\vec{k} = (0; 0; 1)$

Vấn Đề 4: Viết phương trình mp (β) là mặt phẳng trung trực của AB.

P.Pháp:

- Mp $(\beta) \perp AB$. Nên có VTPT là AB đi qua I là trung điểm của AB
- Kết luận.
-

Vấn Đề 9: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua giao tuyến của hai mp (α_1) và (α_2)

* Đi qua điểm M_0

P.Pháp: Mp (α) đi qua giao tuyến của (α_1) và (α_2) có dạng:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

$$M_0 \in (\alpha) \Rightarrow k_1\lambda = k_2\mu$$

Vấn Đề 5: Viết phương trình mp (β) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$

P.pháp:

- $(\beta) // (\alpha)$. Nên phương trình (β) có dạng:

$$Ax + By + Cz + D' = 0$$

$$M_0 \in (\beta) \Rightarrow D'$$

- Kết luận

Vấn Đề 6: Viết phương trình mp (P) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mp (Q)

P.Pháp:

- Mp (P) có cặp VTCP là: $\vec{AB}$ và VTPT của (Q) là $\vec{n}_Q$
- Mp (P) có VTPT là $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{n}_Q]$ và qua A
- Kết luận.

Vấn Đề 7: Viết phương trình mp (α) đi qua các điểm là hình chiếu của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ trên các trục tọa độ.

P.Pháp: * Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu của điểm M trên Ox, Oy, Oz. Thì $M_1(x_0; 0; 0)$, $M_2(0; y_0; 0)$, $M_3(0; 0; x_0)$

* Phương trình mp (α) là:

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1$$

Vấn Đề 8: Viết phương trình mp (α) đi qua điểm M_0 và vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

P.Pháp:

- (P) có VTPT là $\vec{n}_P$
- (Q) có VTPT là $\vec{n}_Q$
- Mp (α) có VTPT là $[\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$ và qua M_0
- Kết luận.

Chọn $\lambda = \Rightarrow \mu$ Kết luận.

*Song song với mặt phẳng (α_3) : $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$

Mp (α) có dạng: $(\lambda A_1 + A_2\mu)x + (B_1\lambda + B_2\mu)y + (C_1\lambda + C_2\mu)z + \lambda D_1 + \mu D_2 = 0$

(α) Có VTPT: $\vec{n}_\alpha = (\lambda A_1 + \mu A_2; \lambda B_1 + \mu B_2; \lambda C_1 + \mu C_2)$

Có VTPT: $\vec{n}_3 = (A_3; B_3; C_3)$

Vì $(\alpha) // (\alpha_3)$. Nên $\frac{\lambda A_1 + \mu A_2}{A_3} = \frac{\lambda B_1 + \mu B_2}{B_3} = \frac{\lambda C_1 + \mu C_2}{C_3}$

Giải tìm λ, μ

* (α) vuông góc với (α_3) : $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$

Ta có: $\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_3 \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_3 = 0$

Chọn $\lambda \Rightarrow \mu$ Kết luận.

9 Vấn Đề 10: Viết phương trình mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu (S) tại tiếp điểm A.

P.Pháp:

- Xác định tâm I của mặt cầu (S)
- Mặt phẳng (α) : Mp tiếp diện có VTPT: $\vec{IA}$
- Viết phương trình tổng quát.

I

II. ĐƯỜNG THẲNG:

9 Phương trình đường thẳng:

1) Phương trình tổng quát của đường thẳng:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

với $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$

2) Phương trình tham số của đường thẳng đi

qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ có VTCP

$\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ là:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3) Phương trình chính tắc của đường thẳng đi

qua điểm M_0 có VTCP: $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ là

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad \text{Với}$$

Σ Qui ước: Nếu $a_i = 0$ thì $x - x_0 = 0$

9 Vấn Đề 11: Tìm VTCP của đường thẳng tổng quát.

$$\Delta: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

P.Pháp:

$$\Delta \text{ có VTCP là: } \vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1C_1 \\ B_2C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1A_1 \\ C_2A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix} \right)$$

9 Vấn Đề 12: Viết phương trình đường thẳng Δ :

P.Pháp:

- Cần biết VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Delta$
- Viết phương trình tham số theo công thức (2)
- Viết phương trình chính tắc theo công thức (3)
- Viết phương trình tổng quát. thì từ phương trình chính tắc, ta có phương trình tổng quát:

- Rút gọn về dạng (1)

Σ Chú ý:

Viết phương trình tổng quát về phương trình tham số Hoặc chính tắc. Ta tìm:

- VTCP $\vec{u} = (a_1; a_2; a_3)$ bằng vấn đề 11
- Cho một ẩn bằng 0 Hoặc bằng một giá trị nào đó. Giải hệ tìm x, y $\Rightarrow z$
- Có điểm thuộc đường thẳng
- Kết luận.

9 Vấn Đề 13: Viết ptr đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

P.Pháp:

- $M_p(\alpha)$ có VTPT là $\vec{n} = (A; B; C)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm M_0 và có VTCP là $\vec{n}$

- Viết phương trình chính tắc $\Rightarrow$ Ptr tổng quát

9 **Vấn Đề 14: Viết phương trình hình chiếu của d trên mp (α)**

P.Pháp:

- Gọi d' là hình chiếu của d trên mp (α)
- Gọi (β) là mặt phẳng chứa d và $(\beta) \perp (\alpha)$
- Nên (β) có cặp VTCP là
- VTCP của d là $\vec{u}_d$ và $\vec{n}_\alpha$ là VTPT của mặt phẳng (α)

- Mp (β) có VTPT $\vec{n}_\beta = [\vec{u}_d, \vec{n}_\alpha]$
- Mp (β) đi qua điểm $M_0 \in d$
- Viết phương trình tổng quát của Mp (β)

- Phương trình đường thẳng d' : $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha) \end{array} \right.$

9 **Vấn Đề 15: Viết phương trình đường thẳng d qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với hai đường Δ_1 và Δ_2**

P.Pháp:

- Δ_1 có VTCP $\vec{u}_1$
- Δ_2 có VTCP $\vec{u}_2$
- d vuông góc với Δ_1 và Δ_2 . Nên d có VTCP là $\vec{u}_d = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$

9 **Vấn Đề 16: Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và cắt cả hai đường Δ_1 và Δ_2 .**

P.Pháp:

- Thay toạ độ A vào phương trình Δ_1 và Δ_2
 $\Rightarrow A \notin \Delta_1, A \notin \Delta_2$
- Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và chứa Δ_1
- Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua điểm A và chứa Δ_2

- P.tr đường thẳng d : $\left\{ \begin{array}{l} (P) \\ (Q) \end{array} \right.$

9 **Vấn Đề 17: Viết phương trình đường thẳng $d \subset (P)$ cắt cả hai đường Δ_1 và Δ_2 .**

P.Pháp:

- Gọi $A = \Delta_1 \cap (P)$

- Gọi $B = \Delta_2 \cap (P)$

- Đường thẳng chính là đường thẳng AB

9 **Vấn Đề 18: Viết phương trình đường thẳng $d \parallel d_1$ và cắt cả hai đường Δ_1 và Δ_2 .**

P.Pháp

- Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ_1 và $(P) \parallel d_1$
- Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ_2 và $(Q) \parallel d_1$
- $d = (P) \cap (Q)$

- Phương trình đường thẳng d $\left\{ \begin{array}{l} (P) \\ (Q) \end{array} \right.$

9 **Vấn Đề 19: Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau Δ_1 và Δ_2 .**

P.Pháp:

- Gọi $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ lần lượt là VTCP của Δ_1 và Δ_2
- Gọi $\vec{v} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$
- Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ_1 và có một VTCP là $\vec{v}$. Nên có VTPT là $\vec{n}_p = [\vec{u}_1, \vec{v}]$
 $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (P)
- Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ_2 và có một VTCP là $\vec{v}$. Nên có VTPT là $\vec{n}_q = [\vec{u}_2, \vec{v}]$
 $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (Q)
- Phương trình đường vuông góc chung của

$$\Delta_1 \text{ và } \Delta_2 : \left\{ \begin{array}{l} (P) \\ (Q) \end{array} \right.$$

9 **Vấn Đề 30: Viết phương trình đường thẳng d vuông góc (P) và cắt hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2**

P.Pháp:

- Gọi (α) là mặt phẳng chứa Δ_1 và có một VTCP là $\vec{n}_p$ (VTPT của (P))
- Gọi (β) là mặt phẳng chứa Δ_2 và có một VTCP là $\vec{n}_q$ (VTPT của (P))
- Đường thẳng $d = (\alpha) \cap (\beta)$

9 **Vấn Đề 31: Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M_0 vuông góc với đường thẳng Δ_1 và cắt đường thẳng Δ_2**

P.Pháp:

- Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M_0 và vuông góc Δ_1

- Gọi (β) là mặt phẳng đi qua điểm M_0 và chứa Δ_2

- Đường thẳng $d = (\alpha) \cap (\beta)$

9 Vấn Đề 32: Viết phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) và $d \subset (\alpha), d \perp \Delta$

P.Pháp:

- Gọi $\{A\} = \Delta \cap (\alpha)$
- Gọi (β) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ . Nên (β) có VTPT là VTCP của Δ

Đường thẳng $d = (\alpha) \cap (\beta)$

IV. MẶT CẦU:

1. Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ bán kính R là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

2. Mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với đk $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

thì (S) có: Tâm $I(a; b; c)$

$$\text{Bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

9 Vấn Đề 20: Viết phương trình mặt cầu

P.Pháp: Cần:

- Xác định tâm $I(a; b; c)$ của mặt cầu
- Bán kính R
- Viết phương trình mặt cầu $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

9 Vấn Đề 21: Viết phương trình mặt cầu đường kính AB

P.Pháp:

- Gọi I là trung điểm của AB . Tính tọa độ $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu
- Bán kính $R = \frac{1}{2} AB$
- Viết phương trình mặt cầu

9 Vấn Đề 22: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và tiếp xúc với (α) :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

P.Pháp:

- Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (α) . Nên có bán kính

$$R = d(I, (\alpha)) = \frac{|Ax_I + By_I + Cz_I + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Viết phương trình mặt cầu

9 Vấn Đề 23: Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$

P.Pháp:

- Phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
- A, B, C, D thuộc (S). Ta có hệ phương trình
- Giải hệ phương trình tìm a, b, c, d
- Kết luận

9 Vấn Đề 24: Lập phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C có tâm nằm trên mặt phẳng Oxy

P.Pháp:

- Gọi $I(x_I; y_I; 0)$ là tâm của mặt cầu, $I \in (Oxy)$
- Ta có $AI^2 = BI^2 = CI^2$
- Ta có Hpt $\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases}$
- Giải Hpt $\Rightarrow I \Rightarrow IA = R$
- Kết luận

9 Vấn Đề 25: Tìm tâm, bán kính của mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0$

P.Pháp 1:

- Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
- Suy ra: $\begin{cases} -2a = m \\ -2b = n \\ -2c = p \\ d = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \\ b = \\ c = \\ d = \end{cases}$
- Vậy (S) có tâm là $I(a; b; c)$,
Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

P.Pháp 2:

- Đưa về dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

V. KHOẢNG CÁCH:

1) Khoảng cách giữa hai điểm

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

2) Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3) Khoảng cách từ điểm M_1 đến đường thẳng d

- Lấy $M_0 \in d$
- Tìm VTCP của đường thẳng d là $\vec{u}$

$$d(M_1, d) = \frac{|\overrightarrow{M_0 M_1}, \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

4) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ'

- Gọi $\vec{u}$ và $\vec{u}'$ lần lượt là VTCP của Δ và Δ'
- Δ đi qua điểm M_0 , $M'_0 \in \Delta'$

$$d(\Delta, \Delta') = \frac{|\overrightarrow{[u, u']} \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0}|}{|\overrightarrow{[u, u']}|}$$

VI. GÓC:

1. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

2. Góc giữa hai đường thẳng (a) và (b)

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng (a) và (b) ($0 \leq \varphi \leq 90^\circ$)

Đường thẳng (a) và (b) có VTCP lần lượt là :

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

* Đặc biệt: $a \perp b \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

3. Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (α')

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(\alpha'): A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (α')

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

4. Góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng

(d): có VTCP là $\vec{u} = (a, b, c)$

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$$

Gọi φ là góc nhọn giữa (d) và (α)

$$\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{Aa + Bb + Cc}|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

9 Vấn Đề 26: Vị trí tương đối

1. Vị trí tương đối của hai đường Δ và Δ'
 Δ có VTCP: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $M_0 \in \Delta$

Δ' có VTCP: $\vec{a}' = (a'_1, a'_2, a'_3)$; $M'_0 \in \Delta'$

a) Δ và Δ' đồng phẳng

$$\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{a}'] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} = 0$$

b) Δ cắt $\Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{a}, \vec{a}'] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} = 0 \\ a_1 : a_2 : a_3 \neq a'_1 : a'_2 : a'_3 \end{cases}$

c) $\Delta \equiv \Delta' \Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = a'_1 : a'_2 : a'_3$
 $= (x'_0 - x_0) : (y'_0 - y_0) : (z'_0 - z_0)$

d) Δ chéo $\Delta' \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{a}'] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} \neq 0$

2. Vị trí tương đối giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α)

Giả sử:

Δ có VTCP: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ và đi qua

$$M_0(x_0; y_0; z_0)$$

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$$

P.Pháp:

- Viết phương trình tham số của Δ
- Toạ độ giao điểm của đường thẳng Δ và mp (α) là nghiệm của hệ phương trình

$$\bullet \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \quad (1) \\ y = y_0 + a_2 t \quad (2) \\ z = z_0 + a_3 t \quad (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 \quad (4) \end{cases}$$

- Thế (1), (2), (3) vào (4) ta được phương trình (*) theo t

- Nếu (*) vô nghiệm $\Delta // (\alpha)$
- Nếu (*) có nghiệm tùy ý thì $\Delta \subset (\alpha)$
- Nếu (*) có một nghiệm thì Δ cắt (α) tại một điểm thế vào (1), (2), (3) tìm toạ độ giao điểm

3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

$$(\alpha_1): A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$(\alpha_2): A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

P.Pháp:

- $(\alpha_1) // (\alpha_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
- $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow$

— — — —

4. Vị trí tương đối giữa mp (α) và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R

P.Pháp:

- Tính $d(I, (\alpha))$
- Nếu $d(I, (\alpha)) > R \Rightarrow (\alpha)$ không cắt (S)
- Nếu $d(I, (\alpha)) = R \Rightarrow (\alpha)$ tiếp xúc (S)
- Nếu $d(I, (\alpha)) < R \Rightarrow (\alpha)$ cắt (S) theo một đường tròn giao tuyến có bán kính

$$r = \sqrt{R^2 - [d(I, (\alpha))]^2}$$

Gọi d' là đường thẳng đi qua tâm I và $d' \perp (\alpha)$

Gọi $\{H\} = d' \cap (\alpha) \Rightarrow H$ là tâm đường tròn giao tuyến

5. Tọa độ giao điểm của đường thẳng Δ và mặt cầu (S)

P.Pháp:

* Viết phương trình đường Δ về dạng phương trình tham số

* Thay vào phương trình mặt cầu (S) ta được phương trình (*) theo t

- ♦ Nếu ptr (*) vô nghiệm $\Rightarrow \Delta$ không cắt mặt cầu (S)
- ♦ Nếu ptr (*) có nghiệm kép $\Rightarrow \Delta$ cắt (S) tại một điểm

Nếu ptr (*) có hai nghiệm $\Rightarrow \Delta$ cắt (S) tại hai điểm. Thế $t = \dots$ vào phương trình tham số của $\Delta \Rightarrow$ Tọa độ giao điểm

9 Vấn Đề 27: Tìm giao điểm H của Δ và mp (α)

và $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

P.Pháp:

- Gọi $\{H\} = \Delta \cap (\alpha)$

- (α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ hay $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ hay $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

- Tọa điểm H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t & (1) \\ y = y_0 + a_2 t & (2) \\ z = z_0 + a_3 t & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases}$$

- Thế (1), (2), (3) vào (4) ta được phương trình $\Rightarrow t$
- Thế $t = \dots$ vào (1), (2), (3) ta được tọa độ điểm H

9 Vấn Đề 28: Tọa độ điểm M' đối xứng của M qua mặt phẳng (α)

P.Pháp:

- Gọi $M' (x'; y'; z')$ là điểm đối xứng của M qua (α)

- Gọi d là đường thẳng đi qua M và $d \perp (\alpha)$

. Nên d có VTCP là $\vec{n}$

- Viết phương trình tham số của d

- Gọi $\{H\} = d \cap (\alpha)$

- Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương

$$\text{trình } \begin{cases} (d): \\ (\alpha): \end{cases} \Rightarrow \text{Tọa độ điểm H}$$

- Vì H là trung điểm của $MM' \Rightarrow$ Tọa độ điểm M'

9 Vấn Đề 29: Tìm tọa độ điểm M' đối xứng của M_0 qua đường thẳng d

P.Pháp:

- Gọi $M' (x'; y'; z')$

- Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M_0 và $(P) \perp d$. Nên (P) nhận VTCP của d làm VTPT

- Gọi $\{H\} = d \cap (P)$

- M' là điểm đối xứng của M_0 qua đường thẳng d. Nên H là trung điểm của đoạn $M_0 M'$

Ta có:
$$\begin{cases} x_H = \frac{x_0 + x'}{2} \\ y_H = \frac{y_0 + y'}{2} \\ z_H = \frac{z_0 + z'}{2} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M}'$$