Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 1:

KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

Bài toán hàm số và các vấn đề liên quan thuộc loại cơ bản, để giải quyết tốt phần này các em nên lưu ý đến các bước của một bài toán khảo sát và vẽ đồ thị hàm số. Trong chương trình thi Tuyển Sinh đại học chỉ đề cập đến ba dạng hàm số cơ bản đó là hàm số bậc ba, hàm trùng phương và phân thức bậc nhất trên bậc nhất. Cuốn tài liệu này trình bày mẫu các bước của một bài toán khảo sát, ngoài ra các bài toán liên quan được phân theo từng dạng. Đó là các bài toán:

- *Bài toán khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số*
- *Bài toán về tính đơn điệu của hàm số*
- *Bài toán về điều kiện nghiệm của phương trình, hệ phương trình(được trình bày chi tiết trong chương 2)*
- *Bài toán về sự tương giao của đồ thị hàm số*
- *Bài toán về cực trị hàm số*
- *Bài toán về tiếp tuyến với đồ thị hàm số*
- *Bài toán về các điểm đặc biệt*

BÀI TOÁN KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Dưới đây trình bày mẫu cách khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số của ba dạng hàm số là hàm đa thức bậc ba, hàm trùng phương và hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất.

<u>Hàm đa thức bậc ba</u>

Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$, m là tham số thực.
Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

<u>Trình bày:</u>

Khi $m = 1$ ta có hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 1$.
+ Tập xác định: $\mathbb{R}$
+ Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 4x$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \frac{4}{3}$.

  Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{4}{3}\right)$.

- Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0; y_{CĐ} = 1$, đạt cực tiểu tại $x = \frac{4}{3}; y_{CT} = -\frac{5}{27}$.

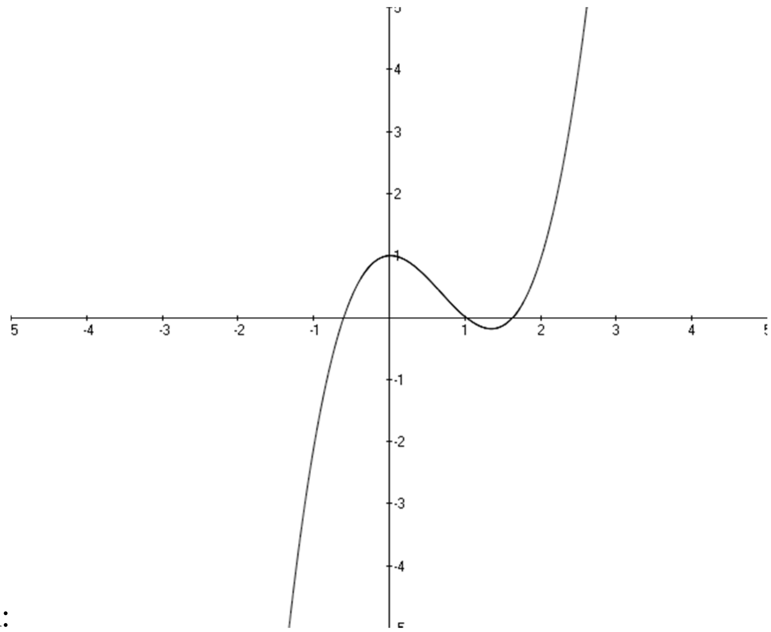
- Giới hạn: $\lim_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$4/3$		$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
y			1				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-5/27$		

+ Đồ thị:



$(1;0)$ $(0;1)$.

<u>Hàm trùng phương</u>

Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$, m là tham số thực. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

<u>Trình bày:</u>

Khi $m = 1$, ta có hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$.

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$

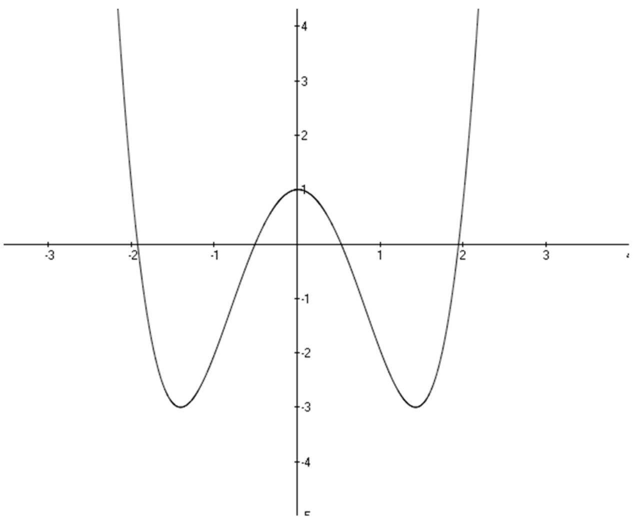
+ Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y = 4x^3 - 8x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{2}$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(0;\sqrt{2}\right)$; đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$

- Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm\sqrt{2}; y_{CT}=-3$, đạt cực đại tại $x=0; y_{CĐ}=1$.
- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.
- Bảng biến thiên:

x	-∞		-[2]2		0		[2]2		+∞
y'	-∞	-	0	+	0	-	0	+	+∞
y	+∞	↘		↗	1	↘		↗	+∞
			-3				-3		



+ Đồ thị:

Đ $(0;1)$ $\left(\pm\sqrt{2+\sqrt{3}};0\right);\left(\pm\sqrt{2-\sqrt{3}};0\right)$.

<u>Hàm bậc nhất trên bậc nhất</u>

Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

<u>Trình bày:</u>

+ Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

+ Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in D$

  Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

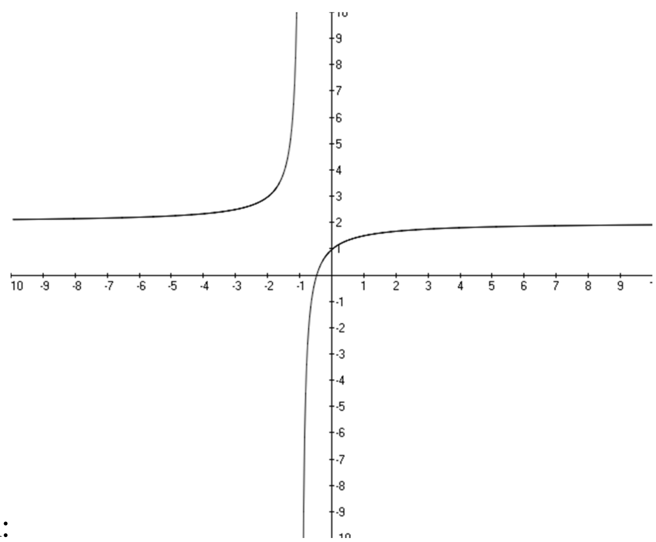
- Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}y=2;$ tiệm cận ngang $y=2$.

  $\lim\limits_{x\to(-1)^-}y=+\infty,\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}y=-\infty;$ tiệm cận đứng $x=-1$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'	0	+	||	+	0
y	2	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	2

+ Đồ thị:



$\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ $(0;1)$.

BÀI TOÁN VỀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Phương pháp:

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0,\forall x\in(a;b)$.

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)\le 0,\forall x\in(a;b)$.

Ta thường biến đổi bất phương trình $f'(x)\ge 0$ thành hai vế một vế là hàm của x còn một vế chứa tham số m.

Có hai dạng bất phương trình sau

$f(x)\ge g(m),\forall x\in(a;b)\Leftrightarrow g(m)\le \min\limits_{x\in(a;b)} f(x)$.

$f(x)\le g(m),\forall x\in(a;b)\Leftrightarrow g(m)\ge \max\limits_{x\in(a;b)} f(x)$.

Trong đó $g(m)$ là hàm số theo tham số m.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}(m-1)x^3+mx^2+(3m-2)x$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên tập xác định.

<u>Lời giải:</u>

+ Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có $y'=(m-1)x^2+2mx+3m-2$

Vậy hàm số đồng biến trên tập xác định khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ \Delta'=m^2-(m-1)(3m-2)\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (2-m)(1+2m)\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow m\ge 2$.

Vậy $m\ge 2$ là những giá trị cần tìm.

Bài 2. Cho hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

<u>Lời giải:</u>

+ Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-m\}$.

Ta có $y'=\frac{m^2-4}{(x+m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $y'<0\Leftrightarrow m^2-4<0\Leftrightarrow -2<m<2$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ thì ta phải có $-m\ge 1\Leftrightarrow m\le 1$

Kết hợp 2 điều kiện trên suy ra $-2<m\le 1$.

Bài 3. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$.
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải:

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 3x^2 + 6x - m$
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ khi và chỉ khi
$y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m \leq f(x) = 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{x \in (-\infty;0)} f(x)$

Ta có $f'(x) = 6x + 6, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ suy ra $\min\limits_{x \in (-\infty;0)} f(x) = f(-1) = -3$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m \leq -3$.

Bài 4. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$.
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải:

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$ có $\Delta = (2m+1)^2 - 4m(m+1) = 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+1 \end{array}\right.$. Suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; m)$ và $(m+1; +\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Bài 5. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$.
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Lời giải:

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

+ Nếu $m \leq 0 \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; 2) \Rightarrow m \leq 0$ thỏa mãn.

+ Nếu $m > 0 \Rightarrow y' = 0$ có nghiệm phân biệt $x = -\sqrt{m}, x = 0, x = \sqrt{m}$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\sqrt{m}; 0), (\sqrt{m}; +\infty)$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$ khi và chỉ khi $\sqrt{m} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $(-\infty; 1]$.

Bài 6. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải:

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m \geq 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 2 - m(1+4x) \geq 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3x^2+2x+2}{1+4x} \geq m, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x)$

Ta có $f'(x) = \dfrac{2(6x^2+x-3)}{(4x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + x - 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{73}}{12} > 0$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0;+\infty)$ suy ra $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x) = f\left(\dfrac{-1+\sqrt{73}}{12}\right) = \dfrac{3+\sqrt{73}}{8}$.

Vậy $m \leq \dfrac{3+\sqrt{73}}{8}$ là giá trị cần tìm.

Bài 7. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx - 2$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Lời giải:

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 4x + m$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi $y' = x^2 - 4x + m \geq 0, \forall x \in (-\infty;1)$

$\Leftrightarrow m \geq f(x) = -x^2 + 4x, \forall x \in (-\infty;1) \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{x\in(-\infty;1)} f(x)$

Ta có $f'(x) = 4 - 2x > 0, \forall x \in (-\infty;1) \Rightarrow \max\limits_{x\in(-\infty;1)} f(x) = f(1) = 3$.

Vậy $m \geq 3$ là giá trị cần tìm.

Bài 8. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x + 3m - 4$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài đúng bằng 1.

Lời giải:

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y'=3\left(x^2-2mx+1\right)$

Vậy hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài đúng bằng 1 khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\left|x_1-x_2\right|=1$.

Điều này tương đương với $\begin{cases}\Delta'=m^2-1>0\\ \left|x_1-x_2\right|=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2>1\\ \left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=1\end{cases}$ (*)

Theo định lý Vi – ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\ x_1x_2=1\end{cases}$, thay vào (*) ta được

$\begin{cases}m^2>1\\ 4m^2-4=1\end{cases} \Leftrightarrow m=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $m\in\left\{\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$ là giá trị cần tìm.

Bài 9. Cho hàm số $y=x^3-\left(m+1\right)x^2-\left(2m^2-3m+2\right)x+m\left(2m-1\right)$.
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\left[2;+\infty\right)$

<u>Lời giải:</u>

\+ Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-2\left(m+1\right)x-\left(2m^2-3m+2\right)$.

Hàm số đồng biến trên $\left[2;+\infty\right)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\ge 2$.

$\Leftrightarrow f(x)=3x^2-2\left(m+1\right)x-\left(2m^2-3m+2\right)\ge 0,\forall x\in\left[2;+\infty\right)$

Vì tam thức $f(x)$ có $\Delta'=7m^2-7m+7>0,\forall m$

Nên $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{m+1-\sqrt{\Delta'}}{3};x_2=\dfrac{m+1+\sqrt{\Delta'}}{3}$.

Vậy $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge x_2\\ x\le x_1\end{array}\right.$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;x_1\right),\left(x_2;+\infty\right)$. Vậy hàm số đồng biến trên đoạn $\left[2;+\infty\right)$ khi và chỉ khi

$x_2\le 2 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'}\le 5-m \Leftrightarrow \begin{cases}5-m\ge 0\\ \Delta'\le\left(5-m\right)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\le 5\\ 2m^2+m-6\le 0\end{cases} \Leftrightarrow -2\le m\le\dfrac{3}{2}$.

Vậy $m\in\left[-2;\dfrac{3}{2}\right]$ là giá trị cần tìm.

Bài 10. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+1$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Lời giải:

+ Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)\ge 0, \forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\ge \frac{6-2x}{x^2-2x+3}=f(x), \forall x\in(2;+\infty) \Leftrightarrow m\ge \max\limits_{x\in(2;+\infty)} f(x)$

Ta có $f'(x)=\frac{2(x^2-6x+3)}{(x^2-2x+3)^2}=0 \Leftrightarrow x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow x=3+\sqrt{6}>2$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(2;+\infty)$ ta suy ra $\max\limits_{x\in(2;+\infty)} f(x)=f(2)=\frac{2}{3}$.

Vậy $m\ge\frac{2}{3}$ là giá trị cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}(m+2)x^3-(m+2)x^2-(3m-1)x+m^2$.

Tìm các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên tập xác định.

1.2. Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x+4m}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$

1.3. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+(m+1)x^2-4x+3$ nghịch biến trên tập xác định.

1.4. Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+mx+4$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

1.5. Cho hàm số $y=x^3-3(2m+1)x^2+(12m+5)x+2$ đồng biến trên cả hai khoảng $(-\infty;-1)$ và $(2;+\infty)$.

1.6. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

1.7. Cho hàm số $y=4x^3+(m+3)x^2+mx$. Tìm m để

a. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

b. Hàm số đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$

c. Hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

d. Hàm số đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

1.8. Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{3}$ đồng biến trên khoảng $\left[2,+\infty\right)$

1.9. Tìm để hàm số $y=x^3+3x^2+(m+1)x+4m$ nghịch biến trên khoảng $(-1,1)$.

1.10. Tìm m để hàm số $y=\frac{m-1}{3}x^3+mx^2+(3m-2)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

1.11. Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3+2(m-1)x^2+(m-1)x+m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty,0)\cup\left[2,+\infty\right)$

1.12. Cho hàm số $y=-x^4+2mx^2-m^2$. Tìm m để

a. Hàm số nghịch biến trên $(1,+\infty)$

b. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1,0)\cup(2,3)$

1.13. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x-m}$. Tìm m để

a. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0,+\infty)$

KHẢO SÁT SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PT, HPT

Phương pháp:

Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên miền D

- Nếu $f(x)$ đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm trên D khi đó phương trình $f(x)=0$ nếu có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất.
- Nếu tồn tại $a,b\in D$ thỏa mãn $f(a)f(b)<0$ khi đó phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x_0\in(a,b)$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Chứng minh rằng phương trình $x^5-x^2-2x-1=0$ có đúng 1 nghiệm thực.

Lời giải:

Phương trình tương đương với : $x^5 = (x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$. Với $x \geq 0 \Rightarrow (x+1)^2 \geq 1$. Khi đó để phương trình có nghiệm thì $x^5 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$.
Vậy ta xét nghiệm của phương trình trên khoảng $[1,+\infty)$.

Ta xét hàm số $f(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 5x^4 - 2x - 2 = (2x^4 - 2x) + (3x^4 - 2) > 0, \forall x \in [1,+\infty)$

Do đó hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng trên $[1,+\infty)$. Do đó nếu có nghiệm thì phương trình đã cho sẽ có nghiệm duy nhất.
Mặt khác ta lại có
$f(1) = -3; f(2) = 23 \Rightarrow f(1)f(2) < 0$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm thực duy nhất.□

Bài 2. Chứng minh rằng phương trình $x.2^x = 1$ có nghiệm thực duy nhất trong khoảng $(0,1)$.

<u>Lời giải :</u>
Xét hàm số $f(x) = x.2^x - 1$ trên khoảng $(0,1)$

Ta có $f'(x) = 2^x + x2^x \ln 2 = 2^x(1 + x\ln 2) > 0, \forall x \in (0,1)$. Nên hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng trong khoảng $(0,1)$.

Mặt khác ta lại có $f(0) = -1; f(1) = 1 \Rightarrow f(0).f(1) = -1 < 0$. Từ đó suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất trên khoảng $(0,1)$.

Bài 3. Chứng minh rằng phương trình $\dfrac{e^x}{(x+1)^2} = x$ có nghiệm thực duy nhất trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

<u>Lời giải :</u>

Phương trình tương đương với : $e^x = x(x+1)^2$

Với $x \in \left[\dfrac{1}{2},1\right]$ ta lấy logarit tự nhiên hai vế của phương trình trên ta được

$x - \ln x - 2\ln(x+1) = 0$ (*).

Ta xét hàm số $f(x) = x - \ln x - 2\ln(x+1)$ liên tục trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x(x+1)} < 0, \forall x \in \left[\dfrac{1}{2},1\right]$. Nên $f(x)$ đơn điệu giảm trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$. Mặt khác ta có $f(1) = 1 - 2\ln 2 < 0; f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \ln 2 - 2\ln\dfrac{3}{2} > 0$

Từ đó suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất trên $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

Bài 4. Chứng minh rằng phương trình $x^{x+1}=(x+1)^x$ có nghiệm thực dương duy nhất.

Lời giải :

Điều kiện : $x>0$.

Lấy logarit tự nhiên hai vế của phương trình ta được : $(x+1)\ln x - x\ln(x+1)=0$.

Xét hàm số $f(x)=(x+1)\ln x - x\ln(x+1)$ trên khoảng $(0,+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{2x+1}{x(x+1)}$

Xét hàm số $g(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{2x+1}{x(x+1)}, x\in(0;+\infty)$.

Ta có $g'(x)=\frac{-1}{x^2}<0$, nên hàm số $g(x)$ đơn điệu giảm trên khoảng $(0,+\infty)$.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{2x+1}{x(x+1)}\right)=0$. Vậy $g(x)>0, \forall x\in(0,+\infty)$. Từ đó suy ra $f'(x)>0, \forall x\in(0,+\infty)$. Vậy $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên khoảng $(0,+\infty)$.

Mặt khác ta có $f(1)=-\ln 2<0, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left[\left(\frac{x}{x+1}\right)^x.x\right]=+\infty$

Từ đó suy ra phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0\in(1,+\infty)$. Ta có đpcm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Chứng minh rằng phương trình $x^5-10x^3+9x-1=0$ có 5 nghiệm thực phân biệt.

1.2. Chứng minh rằng phương trình $4^x(4x^2+1)=1$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

1.3. Chứng minh rằng với mỗi nguyên dương n thì phương trình
$x+x^2+x^3+...+x^{2n}+2012x^{2n+1}=2004$ có nghiệm thực duy nhất.

1.4. Chứng minh rằng phương trình :
$\left(\sqrt{x+1}\right)^{2011}-2(x+1)\sqrt{x+1}-x^3-3x^2-3x-2=0$ có nghiệm thực duy nhất.

1.5. Chứng minh rằng phương trình :
$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-2}+...+\frac{1}{x^n-n}=0, n\in\mathbb{N}^*$ luôn có nghiệm thực duy nhất thuộc khoảng $(0,1)$.

1.6. Chứng minh rằng phương trình : $\lg x=\sin x$ có đúng một nghiệm thực trên đoạn $\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$.

1.7. Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương, $n\ge 2$ thì phương trình

$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{2^2}\right)+...+\tan\left(x+\frac{\pi}{2^n}\right)=0$ có nghiệm thực duy nhất trong khoảng $(0,4)$.

1.8. Cho $n=2k, k\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng phương trình :

$(n+1)x^{n+2}-3(n+2)x^{n+1}+2012^{n+2}=0$.

1.9. Chứng minh rằng với mọi m thì phương trình sau luôn có nghiệm duy nhất

$x^3+3(m+1)x^2+3(m^2+1)x+m^3+1=0$.

1.10. Chứng minh rằng phương trình $x^3-3x^2+1=0$ có ba nghiệm phân biệt

$x_1<x_2<x_3$ thỏa mãn $\begin{cases}|x_1|<x_2\\(2-x_1)(2+x_2)(2+x_3)>27\end{cases}$

1.11. Chứng minh rằng với A,B,C là ba góc của một tam giác thì phương trình sau luôn có 4 nghiệm phân biệt

$3^{|x^2-2x|}=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$

1.12. Chứng minh rằng với mọi m thì hệ sau luôn có nghiệm

$\begin{cases}f^{(2008)}(x)+f^{(2008)}(y)=0\\x^2-4=m(y-1)\end{cases}$, trong đó $f(x)=(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-2x+3}$

BÀI TOÁN VỀ SỰ TƯƠNG GIAO

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong $y=f(x)$ và $y=g(x)$

$f(x)-g(x)=0$ (*)

Khi đó số giao điểm của hai đường cong chính là số nghiệm của phương trình (*).
Trong kì thi Tuyển sinh Đại học và Cao đẳng chỉ xét bài toán giao điểm của đường thẳng với đồ thị của hàm số bậc ba, hàm trùng phương và đồ thị của hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất.

Kiến thức cần vận dụng:

Hai đường cong tiếp xúc nhau:

Hai đường cong $(C): y=f(x)$ và $(C'): y=g(x)$ tiếp xúc nhau khi và chỉ khi hệ phương trình:

$\begin{cases}f(x_0)=g(x_0)\\f'(x_0)=g'(x_0)\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Tương giao với hàm đa thức bậc ba:

(i). Xét phương trình: $y=ax^3+bx^2+cx+d=0$ (*), $a\neq 0$.

Khi đó phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có hai điểm cực trị thỏa mãn $y_{CD}y_{CT} < 0$.

i.1- Nếu phân tích phương trình (*) thành

$$a(x - x_1)(x^2 + px + q) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ g(x) = x^2 + px + q \ (1) \end{array}\right.$$

Khi đó phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác x_1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = p^2 - 4q > 0 \\ g(x_1) \neq 0 \end{cases}$$

i.2- Định lý Vi-ét

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{c}{a} & (2) \\ x_1x_2x_3 = \dfrac{d}{a} & (3) \end{cases}$$

Một số biến đổi thường dùng:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3x_3(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + x_3)$$

i.3- Phương trình (*) có ba nghiệm lập thành cấp cố cộng khi $x_1 + x_3 = 2x_2$ thay vào (1) suy ra $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$, lúc này thay ngược vào phương trình (*) ban đầu sẽ tìm ra giá trị của tham số cần tìm. Tuy nhiên đây chưa phải là điều kiện cần và đủ do đó với mỗi giá trị của tham số tìm được cần giải lại phương trình xem phương trình có ba nghiệm lập thành cấp số cộng hay không. Lúc đó mới chấp nhận giá trị của tham số đó hay không.

i.4- Một cách tương tự phương trình (*) có ba nghiệm lập thành cấp số nhân thì $x_1x_3 = x_2^2$, lúc này ta thay vào (3),…

(ii). Xét với $a > 0$***, ta có:***

ii.1- Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt biệt có hoành độ $> \alpha$, khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\alpha < x_1 < x_2$ và thỏa mãn

$$\begin{cases} y(\alpha) < 0 \\ y(x_1).y(x_2) < 0 \end{cases}$$

ii.2- Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt biệt có hoành độ $<\alpha$, khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2<\alpha$ và thỏa mãn

$$\begin{cases} y(\alpha)>0 \\ y(x_1).y(x_2)<0 \end{cases}$$

Với $a<0$, ta biến đổi phương trình hoành độ giao điểm về phương trình có hệ số a dương và áp dụng với trường hợp $a>0$.

<u>Tương giao với hàm trùng phương :</u>

(i). Xét phương trình: $ax^4+bx^2+c, a\neq 0$ (*)

Đặt $t=x^2\geq 0$, khi đó phương trình trở thành

$$g(t)=at^2+bt+c=0 \ (1)$$

i.1- Phương trình (*) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt đều dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=b^2-4ac>0 \\ S=-\dfrac{b}{a}>0 \\ P=\dfrac{c}{a}>0 \end{cases}$$

Khi đó phương trình (1) có 2 nghiệm $0<t_1<t_2$. Lúc này phương trình (*) sẽ có bốn nghiệm là:

$$x_1=-\sqrt{t_2}, x_2=-\sqrt{t_1}, x_3=\sqrt{t_1}, x_4=\sqrt{t_2}$$

i.2- Vậy phương trình (*) có bốn nghiệm lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3 \Leftrightarrow \sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}=2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2=9t_1$$

Định lí Vi-ét với phương trình (1) ta lại có:

$$\begin{cases} t_1+t_2=-\dfrac{b}{a} \\ t_1t_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

<u>Lưu ý:</u> Dạng toán này luôn cần thiết sử dụng đến định lí Vi-ét.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m \ (1), m$ là tham số thực

Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - m) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x^2 - x - m = 0$ (*)

Đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, khác 1.

Kí hiệu $g(x) = x^2 - x - m; x_1 = 1, x_2$ và x_3 là các nghiệm của (*).

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \\ x_2^2 + x_3^2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ -m \neq 0 \\ 1 + 2m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 1 \text{ và } m \neq 0$$

Vậy $m \in \left(-\frac{1}{4}, 1\right) \setminus \{0\}$ là giá trị cần tìm.

Bài 2. Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ (1)

Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - mx^2 + m - 1 = 0$

Đặt $t = x^2 \geq 0$, khi đó phương trình trở thành

$t^2 - mt + m - 1 = 0$ (*).

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt đều dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 > 0 \\ m > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \neq 2$$

Bài 3. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ (1) (m là tham số)

Tìm m để đường thẳng $d: y = 1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B, C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại B và C vuông góc với nhau.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1$

$\Leftrightarrow x\left(x^2+3x+m\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x^2+3x+m=0(*)$

Kí hiệu $g(x)=x^2+3x+m$

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=9-4m>0\\ g(0)=m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m<\frac{9}{4}, m\neq 0.$$

Khi đó hoành độ của B,C là nghiệm của phương trình (*)

Hệ số góc của tiếp tuyến tại B,C lần lượt là

$k_1=3{x_B}^2+6x_B+m;\ k_2=3{x_C}^2+6x_C+m$

Tiếp tuyến tại B,C vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$k_1k_2=-1 \Leftrightarrow \left(3{x_B}^2+6x_B+m\right)\left(3{x_C}^2+6x_C+m\right)=-1$$

$$\Leftrightarrow \left(3\left({x_B}^2+3x_B+m\right)-2m-3x_B\right)\left(3\left({x_C}^2+3x_C+m\right)-2m-3x_C\right)=-1$$

$$\Leftrightarrow \left(2m+3x_B\right)\left(2m+3x_C\right)=-1 \Leftrightarrow 4m^2+6m\left(x_B+x_C\right)+9x_Bx_C=-1(2)$$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases}x_B+x_C=-3\\ x_Bx_C=m\end{cases}$, khi đó (2) trở thành

$$\Leftrightarrow 4m^2-9m+1=0 \Leftrightarrow m=\frac{9\pm\sqrt{65}}{8}$$

Bài 4. Cho hàm số $y=x^3-3m^2x+2m$ (1)

Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại đúng 2 điểm phân biệt.

<u>Lời giải:</u>

Đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt thì đồ thị hàm số (1) phải có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=3x^2-3m^2=0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\neq 0$ (*)

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm m$

Để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại đúng hai điểm khi và chỉ khi hoặc $y_{CT}=0$ hoặc $y_{CD}=0$

$+y(m)=2m-2m^3=0 \Leftrightarrow m=0 \vee m=\pm 1$

$+y(-m)=2m+2m^3=0 \Leftrightarrow m=0$

Chỉ có $m=\pm 1$ thỏa mãn điều kiện (*). Vậy giá trị cần tìm của m là $m=-1$ hoặc $m=1$

Bài 5. Cho hàm số $y=x^4-2\left(m+1\right)x^2+2m+1$ (1)

Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

<u>Lời giải:</u>

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$

Đặt $t=x^2\geq 0$, khi đó phương trình trở thành $t^2-2(m+1)t+2m+1=0$ (*)

Để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm đều dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2>0\\ 2(m+1)>0\\ 2m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m\neq 0 \ (2).$$

Khi đó (*) có hai nghiệm là $0<t_1<t_2$. Suy ra hoành độ bốn giao điểm lần lượt là $x_1=-\sqrt{t_2};x_2=-\sqrt{t_1};x_3=\sqrt{t_1};x_4=\sqrt{t_2}$. Bốn điểm này lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3 \Leftrightarrow \sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}=2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2=9t_1$

$$\Leftrightarrow m+1+|m|=9(m+1-|m|) \Leftrightarrow 5|m|=4(m+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-\frac{4}{9}\end{array}\right.$$ thỏa mãn (2)

Vậy giá trị cần tìm của m là $m\in\left\{-\frac{4}{9};4\right\}$

Bài 6. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-6\ (C)$.

Tìm m để đường thẳng $(d): y=mx-2m-4$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-6x^2+9x-6=mx-2m-4$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+(9-m)x+2m-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-4x+1-m)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x^2-4x+1-m=0$ (*)

Kí hiệu $g(x)=x^2-4x+1-m$. Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ g(2)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m+3>0\\ -3-m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m>-3$$

Bài 7. Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx-2\ (C_m)$.

Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^3-3(m+1)x^2+6mx-2=0$

$\Leftrightarrow 2x^3-3x^2-2=3m\left(x^2-2x\right)$ (*)

Nhận thấy $x=0, x=2$ không là nghiệm của phương trình (*), khi đó phương trình (*) tương đương với: $3m=\dfrac{2x^3-3x^2-2}{x^2-2x}$ (1)

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{2x^3-3x^2-2}{x^2-2x}$, ta có bảng biến thiên:

x	-∞		1-[2]3		0		1		2		1+[2]3		+∞
y'	2	+	0	-	‖	-	0	-	‖	-	0	+	2
y			3-3*[2]3		‖ +∞		3		‖ +∞				+∞
	-∞	↗		↘	-∞ ‖	↘		↘	-∞ ‖	↘	3+3*[2]3	↗	

Từ bảng biến thiên suy ra để phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $3-3\sqrt{3}\le 3m\le 3+3\sqrt{3}\Leftrightarrow 1-\sqrt{3}\le m\le 1+\sqrt{3}$.

Vậy $m\in\left[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right]$ là những giá trị cần tìm.

<u>**Cách 2:**</u> Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại duy nhất một điểm thì xảy ra một trong hai khả năng

1. Hàm số luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến.
2. Hàm số có cực đại, cực tiểu nhưng $y_{CĐ}y_{CT}>0$.

Bạn đọc tự làm theo hướng này và so sánh với kết quả trên.

Bài 8. Cho hàm số $y=x^3+mx+2\left(C_m\right)$.

Tìm m để đồ thị $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

<u>Lời giải:</u>

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3+mx+2=0$

$\Leftrightarrow m=-x^2-\dfrac{2}{x}\ \left(x\ne 0\right)$, do $x=0$ không là nghiệm của phương trình

Xét hàm số $f(x)=-x^2-\dfrac{2}{x}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{2-2x^3}{x^2}=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	+	||	+	0	-	$-\infty$
y	$-\infty$ ↗		$+\infty$ || $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta suy ra để phương trình có một nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m > -3$

Bài 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4\left(C\right)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A\left(-1;0\right)$ với hệ số góc là k. Tìm k để đường thẳng d cắt đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số tại ba điểm phân biệt A, B, C và 2 giao điểm B, C cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

<u>Lời giải:</u>

+ Phương trình đường thẳng $d: y = k\left(x+1\right)$.

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + 4 = k\left(x+1\right)$

$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x^2 - 4x + 4 - k\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $\left(x-2\right)^2 = k$ (*)

+ Đường thẳng d cắt $\left(C\right)$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $0 < k \neq 9$(**)

Khi đó các giao điểm của d và $\left(C\right)$ là

$A\left(-1;0\right), B\left(2-\sqrt{k}; 3k - k\sqrt{k}\right), C\left(2+\sqrt{k}; 3k + k\sqrt{k}\right)$

Ta có $BC = 2\sqrt{k}\sqrt{1+k^2}, d\left(O;BC\right) = d\left(O;d\right) = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

+ Diện tích tam giác OBC là $S_{OBC} = \dfrac{1}{2}BC.d\left(O;BC\right) = k\sqrt{k} = 1 \Leftrightarrow k = 1$(thỏa mãn điều kiện **).

Vậy $k = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 10. Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + \left(m+3\right)x + 4\left(C_m\right)$

Tìm giá trị của m để đường thẳng $d: y = x + 4$ cắt đồ thị $\left(C_m\right)$ của hàm số tại ba điểm phân biệt $A\left(0;4\right), B, C$ sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$, biết $K\left(1;3\right)$

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2+2mx+m+2\right)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x^2+2mx+m+2=0(*)$

Kí hiệu $g(x)=x^2+2mx+m+2$. Khi đó đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m^2-m-2>0\\ g(0)=m+2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\geq 2\vee m\leq -1\\ m\neq -2\end{cases}(1)$

$B,C\in d \Rightarrow y_B=x_B+4; y_C=x_C+4$ và ta có $d(K;BC)=d(K;d)=\sqrt{2}$.

Vậy $S_{KBC}=\dfrac{1}{2}BC.d(K;BC)=8\sqrt{2} \Leftrightarrow BC=16 \Leftrightarrow BC^2=256$

$\Leftrightarrow (x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2=256 \Leftrightarrow 2(x_B-x_C)^2=256 \Leftrightarrow (x_B+x_C)^2-4x_Bx_C=128(2)$ Theo định lí Vi-ét ta có: $x_B+x_C=-2m; x_Bx_C=m+2$.

$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow 4m^2-4(m+2)=128 \Leftrightarrow m^2-m-34=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$ thỏa mãn (1).

Vậy $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 11. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-\left(m^2-1\right)(1)$

Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương.

Lời giải:

Ta có $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=m-1=x_{CD}\\ x=m+1=x_{CT}\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương khi và chỉ khi

$\begin{cases}y_{CD}y_{CT<0}\\ x_{CD}>0, x_{CT}>0\\ a.y(0)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m-1>0\\ m+1>0\\ \left(m^2-1\right)\left(m^2-3\right)\left(m^2-2m-1\right)<0\\ -\left(m^2-1\right)<0\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3}<m<1+\sqrt{2}.$

Bài 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4(C)$

Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(2;0)$ có hệ số góc k. Tìm k để đường thẳng d cắt đồ thị (C) của hàm số tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho tiếp tuyến của (C) tại B, C vuông góc với nhau.

Lời giải:

+ Phương trình đường thẳng $d: y = k(x-2)$

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + 4 = k(x-2)$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - x - k - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x^2 - x - k - 2 = 0(*)$

Kí hiệu $g(x) = x^2 - x - k - 2$. d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 + 4k > 0 \\ g(2) = -k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < k \neq 0 \ (1)$$

Các tiếp tuyến tại B, C vuông góc với nhau khi và chỉ khi $y'(x_B).y'(x_C) = -1$

$\Leftrightarrow (3{x_B}^2 - 6x_B)(3{x_C}^2 - 6x_C) = -1$ (2)

Theo định lí Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_B + x_C = 1 \\ x_B x_C = -k - 2 \end{cases}$$

Kết hợp với (1) và (2) ta suy ra:

(2) $\Leftrightarrow 9k^2 + 18k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$ (thỏa mãn (1)).

Vậy $k = \dfrac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$ là giá trị cần tìm.

Bài 13. Cho hàm số $y = x^3 - 3x(C)$

Chứng minh rằng khi m thay đổi đường thẳng $d: y = m(x+1) + 2$ luôn cắt đồ thị (C) tại một điểm cố định M và xác định các giá trị m để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt M, N, P sao cho tiếp tuyến của (C) tại N, P vuông góc với nhau.

Lời giải:

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x = m(x+1) + 2$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 2 - m) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x^2 - x - 2 - m = 0(*)$

Do đó d luôn cắt (C) tại điểm $M(-1;2)$.

+ d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt, khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9+4m > 0 \\ -m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < m \neq 0 \ (1)$$

Tiếp tuyến tại N, P vuông góc với nhau khi và chỉ khi $y'(x_N).y'(x_P) = -1$

$$\Leftrightarrow \left(3x_N{}^2 - 3\right)\left(3x_P{}^2 - 3\right) = -1 \ (2)$$

Theo định lí Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_B + x_C = 1 \\ x_B x_C = -m-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow 9k^2 + 18k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3} \text{ (thỏa (1)).}$$

Vậy $k = \dfrac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$ là giá trị cần tìm.

Bài 14. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3}\left(C_m\right)$

Tìm m để đồ thị hàm số $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có tổng bình phương các hoành độ lớn hơn 15.

Bài 15. Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1\left(C_m\right)$

Tìm m để đường thẳng $d: y = -1$ cắt đồ thị $\left(C_m\right)$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2.

<u>Lời giải:</u>

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 3m - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ hoặc } x^2 = 3m + 1 (*)$$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác ± 1 và nhỏ hơn 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3m+1 < 4 \\ 3m+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $\left(-\frac{1}{3}; 1\right) \backslash \{0\}$

Bài 16. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 2m\left(C_m\right)$

Chứng minh rằng đồ thị hàm số $\left(C_m\right)$ luôn cắt trục hoành tại ít nhất 2 điểm phân biệt với mọi $m < 0$

Lời giải:

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-2m^2x^2+m^4+2m=0(*)$

Đặt $t=x^2\ge 0$, khi đó phương trình (*) trở thành $t^2-2m^2t+m^4+2m=0(1)$

Ta có $\begin{cases}\Delta'=-2m>0\\ S=2m^2>0\end{cases}$ $\forall m<0\Rightarrow$ phương trình (1) luôn có ít nhất một nghiệm dương

Từ đó suy ra phương trình (*) có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.Đó là đpcm.

Bài 17. Tìm m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+m\left(C\right)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi $\left(C\right)$ và trục hoành có phần trên bằng phần dưới trục hoành.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-4x^2+m=0$

Đặt $t=x^2\ge 0\Rightarrow$ phương trình trở thành $t^2-4t+m=0(1)$

Vậy $\left(C\right)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt dương $0<t_1<t_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=4-m>0\\ S=4>0\\ P=m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<4\ (i)$$

Khi đó hoành độ 4 giao điểm của $\left(C\right)$ và Ox là

$x_1=-\sqrt{t_2}<x_2=-\sqrt{t_1}<x_3=\sqrt{t_1}<x_4=\sqrt{t_2}$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\int_{x_2}^{3}\left(x^4-4x^2+m\right)dx=-2\int_{x_3}^{x_4}\left(x^4-4x^2+m\right)dx\Leftrightarrow 2\int_{0}^{x_3}\left(x^4-4x^2+m\right)dx=-2\int_{x_3}^{x_4}\left(x^4-4x^2+m\right)dx$$

$$\Rightarrow\frac{1}{5}{x_4}^5-\frac{4}{3}{x_4}^3+mx_4=0\Rightarrow\frac{1}{5}{x_4}^4-\frac{4}{3}{x_4}^2+m=0(2)$$

Ta lại có ${x_4}^4-4{x_4}^2+m=0(3)$. Từ (2) và (3) suy ra $\frac{9}{4}m^2-5m=0\Leftrightarrow m=0$ (loại)

Hoặc $m=\frac{20}{9}$ (thỏa (i)).

Vậy $m=\frac{20}{9}$ là giá trị cần tìm.

Bài 18. Cho hàm số $y=x^4-2\left(m+1\right)x^2+2m+1\left(C_m\right)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt A,B,C,D có hoành độ lần lượt là $x_1<x_2<x_3<x_4$ sao cho tam giác ACK có diện tích bằng 4. Biết rằng $K\left(3,-2\right)$.

Lời giải :

Phương trình hoành độ giao điểm : $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$, đặt $t=x^2\ (t\ge 0)$ khi đó phương trình trở thành :

$t^2-2(m+1)t+2m+1=0(*)$. Để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt $t_2>t_1>0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m^2>0\\ S=2(m+1)>0\\ P=2m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m\ne 0\ (i)$$

Khi đó hoành độ bốn giao điểm lần lượt là $-\sqrt{t_2},-\sqrt{t_1},\sqrt{t_1},\sqrt{t_2}$.

Ta có $S_{ACK}=\frac{1}{2}d(K,AC).AC=\frac{1}{2}|-2|\left(\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}\right)=4\Leftrightarrow \sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=4\Leftrightarrow t_1+t_2+2\sqrt{t_1t_2}=16$

Theo định lý Viét ta có : $t_1+t_2=2(m+1);t_1t_2=\sqrt{2m+1}$, từ đó suy ra :

$2(m+1)+2\sqrt{2m+1}=16\Leftrightarrow \sqrt{2m+1}=7-m\Leftrightarrow \begin{cases}7-m\ge 0\\ 2m+1=(7-m)^2\end{cases}\Leftrightarrow m=4$ thỏa mãn điều kiện *(i)*.

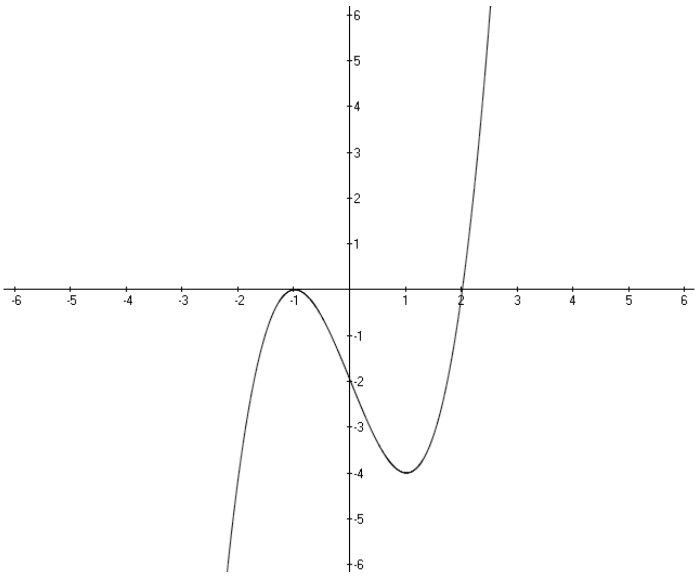
Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

Bài 19. Biết rằng đường thẳng d đi qua điểm $M(2;0)$ và có hệ số góc k cắt đồ thị hàm số $y=|x|^3-3|x|-2$ tại bốn điểm phân biệt. Tìm giá trị của k.

Lời giải:

Đường thẳng $d:y=k(x-2)$, ta dùng trực quan đồ thị để biện luận số giao điểm của đường thẳng d và đồ thị hàm số $y=|x|^3-3|x|-2\ (C_1)$.

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x-2\ (C)$ có đồ thị như sau:

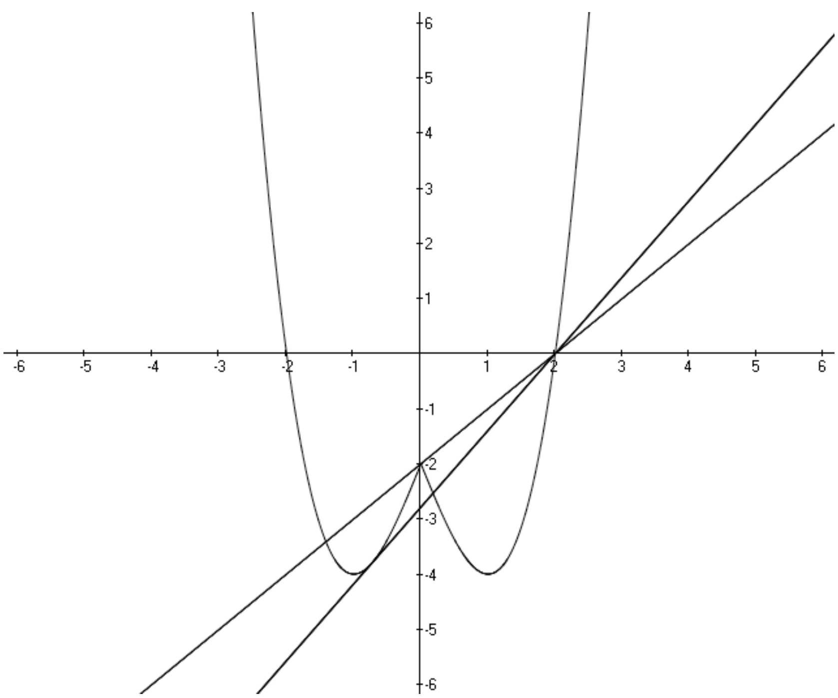


Ta có $y = |x|^3 - 3|x| - 2 = \begin{cases} f(x) = x^3 - 3x - 2, x \ge 0 \\ f(-x) = -x^3 + 3x - 2, x < 0 \end{cases}$

Do đó đồ thị (C_1) gồm hai phần

Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) bên phải trục tung.

Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục tung.



Để đường thẳng d cắt (C_1) tại bốn điểm phân biệt thì d phải nằm trong miền giới hạn bởi hai đường thẳng trên.

- Đường thẳng thứ nhất đi qua điểm $M(2;0)$ và $A(0;-2)$ có hệ số góc là $k_1 = 1$
- Đường thẳng thứ hai là tiếp tuyến với (C_1) ứng với $x < 0$, ta xác định k_2

Ta có $\begin{cases} -x^3 + 3x - 2 = k_2(x-2) \\ -3x^2 + 3 = k_2 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \\ k_2 = 6\sqrt{3} - 9 \end{cases}$

Vậy để d cắt (C_1) tại bốn điểm phân biệt, khi và chỉ khi

$k_1 < k < k_2 \Leftrightarrow 1 < k < 6\sqrt{3} - 9$.

Vậy $k \in \left(1; 6\sqrt{3} - 9\right)$ là giá trị cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số tiếp xúc với trục hoành.

1. $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4 \ (C_m)$.

2. $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1) \ (C_m)$

3. $y = mx^3 + (m+1)x^2 - (4m-3)x + 6m \ (C_m)$

1.2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = m(x-3)$ tiếp xúc với đường cong $y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$.

1.3. Tìm những giá trị của tham số m để hai đường cong sau tiếp xúc nhau $(C_1): y = mx^3 - (m-1)x^2 + (m+1)x + 1$ và $(C_2): y = -mx^2 + (m-1)x - m$

1.4. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3(m+1)x^2 + 3(m^2+1)x + m^3 + 1 = 0$ cắt trục hoành tại duy nhất một điểm.

1.5. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -2.

1.6. Viết phương trình đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $x_A = 2$ và $BC = 2\sqrt{2}$.

1.7. Viết phương trình đường thẳng d song song với trục hoành và cắt đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{8}{3}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

1.8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+3mx+3m+4$ và trục hoành có phần nằm phía trên trục hoành bằng phần nằm phía dưới trục hoành.

1.9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{4}{3}x^3-(2m+1)x^2+(m+2)x+\frac{1}{3}$ (C_m) tại giao điểm A của (C_m) với trục tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{3}$.

1.10. Tìm m để đường thẳng $d: y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-3$ tại bốn điểm phân biệt M,N,P,Q có hoành độ lần lượt $x_1<x_2<x_3<x_4$ sao cho MN,NP,PQ là độ dài ba cạnh tam giác.

1.11. Giả sử đồ thị hàm số $y=x^4-3(m+1)x^2+3m+2$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt, khi $m>0$ gọi A là giao điểm có hoành độ lớn nhất ; tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A cắt trục tung tại B. Tìm m để tam giác OAB có diện tích bằng 24.

1.12. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+2(m^2+4m+1)x-4m(m+1)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1.

1.13. Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x+m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $x_1<x_2<x_3$ thỏa mãn $0<x_1<1<x_2<3<x_4<4$.

1.14. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3-2(m+2)x^2+7(m+1)x-3(m+4)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 hỏa mãn $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+3x_1x_2x_3>53$.

1.15. Chứng minh rằng khi m thay đổi đường thẳng $d_m: y=mx-m^2$ luôn cắt $(C_m): y=x^3-(3m-1)x^2+2m(m-1)x+m^2$ tại một điểm A có hoành độ không đổi. Tìm m để d_m cắt (C_m) tại một điểm nữa khác A mà tiếp tuyến của (C_m) tại hai điểm đó song song với nhau.

1.16. Tìm m để đường thẳng $d: y=-x+1$ cắt $(C_m): y=4x^3-6mx^2+1$ tại 3 điểm $A(0;1),B,C$ biết B,C đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất.

1.17. Tìm m để đồ thị $(C_m): y=x^4-4x^2+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và trục hoành có phần trên bằng phần dưới.

1.18. Cho hàm số $y=-x^4+2(m+2)x^2-2m-3\,(C_m)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm cách đều nhau.

1.19. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3-2(m+1)x^2+2m+1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 3.

1.20. Chứng minh rằng với $m<0$ thì đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+2m+m^4$ luôn cắt trục hoành tại ít nhất hai điểm phân biệt.

1.21. Tìm tất cả các giá trị củ tham số m để đường thẳng $d: y=mx-2m-4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x-6$ tại ba điểm phân biệt.

1.22. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc các tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A, B, C bằng 3.

1.23. Tìm tất cả các cặp số (m,n) sao cho trong các giao điểm của đồ thị hàm số $y = mx^3 - nx^2 - mx + n$ (C) có hai điểm cách nhau 2011 và khoảng cách từ tâm đối xứng của (C) đến trục hoành bằng 2012.

1.24. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = 3 - x$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 4 - m$ (C) tại ba điểm phân biệt $A(1;2), B, C$ sao cho tiếp tuyến với (C) tại B, C lần lượt cắt (C) tại M, N và tứ giác $BMNC$ là hình thoi.

1.25. Tìm tất cả các cặp giá trị (m,n) để đường thẳng $d: y = mx + n$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D có hoành độ lần lượt là $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ sao cho $AB = CD = \frac{1}{2}BC$

1.26. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (2-m)x^2 + 3(2m-3)x + m$ (C_m). Tìm những giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0,m), B, C$, đồng thời OA là phân giác trong góc $\widehat{BOC}$.

1.27. Tìm những giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt A, B, C có hoành độ tương ứng thỏa mãn $(x_A - 2)^3 + (x_B - 2)^3 + (x_C - 2)^3 = 3$.

1.28. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + m - 1$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

<u>Tương giao với hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất :</u>

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}(C)$

Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ lớn nhất.

<u>Lời giải:</u>

Hoành độ giao điểm của $d: y = x + m$ và (C) là nghiệm phương trình: $x + m = \frac{-x+1}{2x-1}$

$\Leftrightarrow (x+m)(2x-1)=-x+1$(do $x=\dfrac{1}{2}$ không là nghiệm) $\Leftrightarrow 2x^2+2mx-m-1=0(*)$

Ta có $\Delta'=m^2+2m+2>0,\forall m$. Suy ra d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

Gọi x_1,x_2 là nghiệm của (*), ta có

$$k_1+k_2=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}-\frac{1}{(2x_2-1)^2}=-\frac{4(x_1+x_2)^2-8x_1x_2-4(x_1+x_2)+2}{(4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1)^2}.$$

Theo định lí Vi-ét ta có $x_1+x_2=-m; x_1x_2=-\dfrac{m+1}{2}$.

Từ đó suy ra $k_1+k_2=-4m^2-8m-6=-4(m+1)^2-2\le -2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=-1$.

Vậy giá trị lớn nhất của $k_1+k_2=-2$ khi và chỉ khi $m=-1$

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x-1}(C)$

Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y=-x-m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng k_1+k_2 nhỏ nhất.

<u>Lời giải:</u>

Hoành độ giao điểm của $d: y=-x-m$ và (C) là nghiệm phương trình: $-x-m=\dfrac{x-1}{2x-1}$

$\Leftrightarrow (x+m)(2x-1)=-x+1$(do $x=\dfrac{1}{2}$ không là nghiệm) $\Leftrightarrow 2x^2+2mx-m-1=0(*)$

Ta có $\Delta'=m^2+2m+2>0,\forall m$. Suy ra d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt với mọi m

Gọi x_1,x_2 là nghiệm của (*), ta có

$$k_1+k_2=\frac{1}{(2x_1-1)^2}+\frac{1}{(2x_2-1)^2}=\frac{4(x_1+x_2)^2-8x_1x_2-4(x_1+x_2)+2}{(4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1)^2}$$

Theo định lí Vi-ét ta có $x_1+x_2=-m; x_1x_2=-\dfrac{m+1}{2}$.

Từ đó suy ra $k_1+k_2=4m^2+8m+6=4(m+1)^2+2\ge 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=-1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $k_1+k_2=2$ khi và chỉ khi $m=-1$

Bài 3. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+2}\ (C)$

Chứng minh rằng đường thẳng $d: y=-x+m$ luôn cắt đồ thị hàm số (C) tại 2 điểm phân biệt A và B. Tìm m để đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

<u>Lời giải:</u>

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm phương trình: $-x+m=\dfrac{2x+1}{x+2}$

$\Leftrightarrow (-x+m)(x+2)=2x+1$

(do $x=-2$ không là nghiệm) $\Leftrightarrow x^2+(4-m)x+1-2m=0$ (*)

Ta có $\Delta=(4-m)^2-4(1-2m)=m^2+12>0, \forall m$. Suy ra d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B

Do $A, B \in d \Rightarrow y_A=-x_A+m; y_B=-x_B+m$. Từ đó suy ra

$AB^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=2(x_A-x_B)^2=2(x_A+x_B)^2-8x_Ax_B$

Theo định lí Vi-ét ta có: $x_A+x_B=m-4; x_Ax_B=1-2m$. Từ đó suy ra

$AB^2=2(m^2+12)\geq 2 \Rightarrow AB\geq\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AB=\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $m=0$

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ (C)

Đường thẳng d có hệ số góc k đi qua điểm $I(-1;1)$ và cắt (C) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho I là trung điểm của MN. Tìm k.

<u>Lời giải:</u>

+ Phương trình đường thẳng $d: y=k(x+1)+1$.

+ Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm phương trình: $\dfrac{x-3}{x+1}=k(x+1)+1$

$\Leftrightarrow kx^2+2kx+k+4=0 (*)$ (do $x=-1$ không là nghiệm).

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta'=-4k>0 \\ x_1+x_2=-2=2x_I \end{cases} \Leftrightarrow k<0$$

Vậy giá trị cần tìm của k là $(-\infty;0)$

Bài 5. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+4}{1-x}(C)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua $I(1;1)$ có hệ số góc k. Tìm k để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho độ dài MN bằng $3\sqrt{10}$

<u>Lời giải:</u>

+ Phương trình đường thẳng $d: y = k(x-1)+1$

+ Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm phương trình: $\dfrac{2x+4}{1-x} = k(x-1)+1$

Do $x=1$ không là nghiệm nên phương trình tương đương với

$kx^2-(2k-3)x+k+3=0(*)$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = 9-24k>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \neq k < \dfrac{3}{8}(1)$

Do $M, N \in d \Rightarrow y_M = k(x_M-1)+1; y_N = k(x_N-1)+1$. Suy ra

$MN^2 = (x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2 = (1+k^2)(x_M-x_N)^2 = (1+k^2)\left[(x_M+x_N)^2-4x_Mx_N\right] = 90$

Theo định lí Vi-ét ta có: $x_M+x_N = \dfrac{2k-3}{k}; x_Mx_N = \dfrac{k+3}{k}$. Từ đó suy ra

$8k^3+27k^2+8k-3=0 \Leftrightarrow (k+3)(8k^2+3k-1)=0 \Leftrightarrow k=-3$ hoặc $k = \dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{16}$ (thỏa mãn (1)).

Vậy giá trị cần tìm của k là $\left\{-3; \dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{16}\right\}$

Bài 6. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}(C)$

Tìm m để đường thẳng $d: y = x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho A và B cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.

<u>Lời giải:</u>

+ Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm phương trình: $x+m = \dfrac{2x-1}{x+1}$

$\Leftrightarrow (x+m)(x+1) = 2x-1$(do $x=-1$ không là nghiệm) $\Leftrightarrow x^2+(m-3)x+1-m=0(*)$. Ta có $\Delta = m^2-2m+5>0, \forall m$. Từ đó suy ra d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

Do hai điểm $A, B \in d \Rightarrow y_A = x_A+m; y_B = x_B+m$.

Suy ra tọa độ của $A(x_A; x_A+m), B(x_B; x_B+m)$

Và $\overrightarrow{OA}=\left(x_A;x_A+m\right),\overrightarrow{OB}=\left(x_B;x_B+m\right)$ Tam giác OAB vuông tại O khi và chỉ khi

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow x_Ax_B+\left(x_A+m\right)\left(x_B+m\right)=0\Leftrightarrow 2x_Ax_B+m\left(x_A+x_B\right)+m^2=0(1)$

Theo định lí Vi-ét ta có: $x_A+x_B=3-m;x_Ax_B=1-m$. Khi đó (1) trở thành

$m^2+m\left(3-m\right)+2\left(1-m\right)=0\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm.

Bài 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}\left(C\right)$.

Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì trên $\left(C\right)$ luôn có các cặp điểm A và B nằm về hai nhánh của $\left(C\right)$ và thỏa mãn $\begin{cases}x_A-y_A+m=0\\x_B-y_B+m=0\end{cases}$

<u>Lời giải:</u>

+ Ta có $\begin{cases}x_A-y_A+m=0\\x_B-y_B+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_A=x_A+m\\y_B=x_B+m\end{cases}\Rightarrow A,B\in d:y=x+m$

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành chứng minh d luôn cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm thuộc về hai nhánh của $\left(C\right)$.

+ Hoành độ giao điểm của d và $\left(C\right)$ là nghiệm phương trình: $x+m=\dfrac{x+2}{x-2}$

$\Leftrightarrow\left(x+m\right)\left(x-2\right)=x+2$ (do $x=2$ không là nghiệm) $\Leftrightarrow x^2+\left(m-3\right)x-\left(2m+2\right)=0(*)$. Ta có $\Delta=m^2+2m+17>0,\forall m$. Từ đó suy ra d luôn cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt với mọi m.

Mặt khác, kí hiệu $g(x)=x^2+\left(m-3\right)x-\left(2m+2\right)\Rightarrow 1.g\left(2\right)=-4<0\Rightarrow 2$ nằm giữa hai nghiệm của (*). Ta có đpcm.

Bài 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-2}\left(C\right)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $\left(d\right):y=x+m$ cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $OA^2+OB^2=\dfrac{37}{2}$.

<u>Lời giải :</u>

Hoành độ giao điểm của $\left(d\right),\left(C\right)$ là nghiệm của phương trình : $\dfrac{x+2}{2x-2}=x+m$

Do $x=1$, không là nghiệm của phương trình nên phương trình tương đương với

$x+2=\left(2x-2\right)\left(x+m\right)\Leftrightarrow 2x^2+\left(2m-3\right)x-2\left(m+1\right)=0(*)$.

Do $\Delta=4m^2+4m+25=\left(2m+1\right)^2+24>0,\forall m\in\mathbb{R}$. Nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Gọi $A(x_1, x_1+m); B(x_2, x_2+m)$ là tọa độ giao điểm của (d) và (C), khi đó theo định lý viét, ta có : $x_1+x_2=-\frac{2m-3}{2}; x_1x_2=-(m+1)$

Từ đó suy ra :

$OA^2+OB^2=x_1^{\,2}+(x_1+m)^2+x_2^{\,2}+(x_2+m)^2$

$=2(x_1+x_2)^2-4x_1x_2+2m(x_1+x_2)+2m^2$

$=2\left(-\frac{2m-3}{2}\right)^2+4(m+1)-2m\left(\frac{2m-3}{2}\right)+2m^2$

$=\frac{1}{2}(4m^2+2m+17)$

Vậy $OA^2+OB^2=\frac{37}{2} \Leftrightarrow=\frac{1}{2}(4m^2+2m+17)=\frac{37}{2} \Leftrightarrow m=-\frac{5}{2} \vee m=2$.

Vậy $m=-\frac{5}{2}; m=2$ là hai giá trị cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho hàm số $y=\frac{2x-m}{mx+1}$ (C_m). Chứng minh rằng với mọi $m\neq 0$, (C_m) cắt đường thẳng $d: y=2(x-m)$ tại hai điểm phân biệt A, B thuộc một đường (H) cố định. Dường thẳng d cắt trục hoành tại hai điểm M, N. Tìm những giá trị của m để $S_{OAB}=3S_{OMN}$.

1.2. Cho hàm số $y=\frac{x}{1-x}(C)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=mx-m-1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất, biết điểm $M(-1,1)$.

1.3. Cho hàm số $y=\frac{2x-2}{x+1}$ (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=\sqrt{5}$

1.4. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+m}$ (C_m). Tìm m để đường thẳng $y=x+2$ cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $AB=2\sqrt{2}$

1.5. Với mỗi giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N và cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A, B. Chứng minh rằng $MA=NB$.

1.6. Cho đường thẳng $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ (C) và điểm $A(-2;4)$. Viết phương trình đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (C) tại hai điểm phân biệt B,C sao cho tam giác ABC đều.

1.7. Tìm m để đường thẳng $d: y=x+2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB\le 4\sqrt{2}$.

1.8. Tìm m để đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{2(x-1)}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $OA^2+OB^2=\dfrac{37}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN VỀ CỰC TRỊ HÀM SỐ

Loại 1 : Điều kiện hàm số $y=f(x)$ có cực trị .

Phương trình $f'(x)=0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt trở lên.
Loại 2 : Điều kiện để một điểm là cực trị của hàm số.

Cho hàm số $y=f(x)$ điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ là điểm cực trị của hàm số khi đó $f'(x_0)=0$.

(i). Nếu $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases} \Rightarrow M$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số

(ii). Nếu $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases} \Rightarrow M$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số

Loại 3 : Đường thẳng đi qua các điểm cực trị của hàm số.

Xét với hàm số đa thức bậc 3 : $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c$.
Lấy y chia cho y' ta được

$$y=\left(\frac{1}{3}x+\frac{b}{9a}\right)y'+\left(\frac{2c}{3}-2\frac{b^2}{9a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}$$

Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thì khi đó $y'(x_1)=y'(x_2)=0$ nên

$\begin{cases} y(x_1) = \left(\dfrac{2c}{3} - 2\dfrac{b^2}{9a}\right)x_1 + d - \dfrac{bc}{9a} \\ y(x_2) = \left(\dfrac{2c}{3} - 2\dfrac{b^2}{9a}\right)x_2 + d - \dfrac{bc}{9a} \end{cases}$ $\Rightarrow$ Hai điểm cực trị của hàm số nằm trên đường thẳng

$$y = \left(\frac{2c}{3} - 2\frac{b^2}{9a}\right)x + d - \frac{bc}{9a}$$

Lưu ý : Với các hoành độ cực trị không phụ thuộc tham số thì ta không cần thiết phải làm theo cách này, nhưng có chứa tham số thì đây là lựa chọn khôn ngoan.

Loại 4 : Các điểm cực trị thỏa mãn một điều kiện chẳng hạn lập thành tam giác vuông, tam giác đều,…Lúc này chúng ta dựa vào tính chất của tam giác.

Dạng toán : Liên quan đến điều kiện tồn tại cực, cực tiểu- tọa độ cực trị.

Phương pháp :

- Để hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.
- Một điểm x_0 là điểm cực tiểu của hàm số thì $\begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)>0 \end{cases}$ cần phải thử lại xem y' có đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x_0 hay không.
- Một điểm x_0 là điểm cực đại của hàm số thì $\begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)<0 \end{cases}$ cần phải thử lại xem y' có đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_0 hay không.
- Cho hai điểm $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ và đường thẳng $d: Ax+By+C=0$ hoặc đường tròn $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Xét $\begin{cases} T=(Ax_1+By_1+C)(Ax_2+By_2+C) \\ V=\left((x_1-a)^2+(y_1-b)^2-R^2\right)\left((x_2-a)^2+(y_2-b)^2-R^2\right) \end{cases}$

Khi đó hai điểm A,B nằm cùng phía với d hoặc (C) khi và chỉ khi $T>0$ hoặc $V>0$.

Hai điểm A,B nằm khác phía đối với d hoặc (C) khi và chỉ khi $T<0$ hoặc $V<0$.

Đặc biệt :

Hai điểm cực trị nằm khác phía với trục tung thì pt $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu.

Hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục hoành thì $y_{CĐ}y_{CT}<0$ hoặc phương trình $y=0$ có ba nghiệm phân biệt.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm m để hàm số sau có cực trị $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(2m^2-3m+2\right)x+8$.

Lời giải :

Ta có $y'=x^2-2mx+2m^2-3m+2$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Delta'=-m^2+3m-2>0\Leftrightarrow 1<m<2$.

Bài 2. Tìm m để hàm số $y=mx^4+\left(m^2-9\right)x^2+10$ có 3 cực trị.

Lời giải :

Ta có $y'=4mx^3+2\left(m^2-9\right)x=2x(2mx^2+m^2-9)$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt, điều này tương đương với

$$\begin{cases}-\dfrac{m^2-9}{m}>0\\ m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<3\vee m<-3$$

Bài 3. Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-mx^2+\frac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

Lời giải :

Ta có $y'=x^3-2mx=x\left(x^2-2m\right)$

+ Nếu $m=0\Rightarrow$ hàm số chỉ có cực tiểu tại $x=0$.
+ Nếu $m<0$ thì hàm số chỉ có cực tiểu tại $x=0$.
+ Nếu $m>0$ thì hàm số có 3 cực trị, nên không thỏa mãn.

Vậy $m\leq 0$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4. Tìm m để hàm số $y=\left(x-m\right)^3-3x$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Lời giải :

Ta có $y'=3\left(x-m\right)^2-3; y''=6\left(x-m\right)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ thì $\begin{cases}y'(0)=0\\ y''(0)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3m^2-3=0\\ -6m>0\end{cases}\Leftrightarrow m=-1$.

Thử lại với $m=-1$ thì hàm số $y=\left(x+1\right)^3-3x$ có $y'=3\left(x+1\right)^2-3=3x\left(x+2\right)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua 0. Vậy nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm.

Bình luận : Rất nhiều học sinh cũng như cả các thầy cô không hiểu rõ điều kiện để hàm số đạt cực trị tại một điểm ; và tất nhiên như trên khi nói điều kiện để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ thì học sinh lại viết :

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y'(0)=0 \\ y''(0)>0 \end{cases}$

Lưu ý : Sẽ không có điều tương đương trên, mà chỉ có là nếu đạt cực tiểu tại $x=0$ thì $\begin{cases} y'(0)=0 \\ y''(0)>0 \end{cases}$ chứ không có điều ngược lại

Do đó khi tìm được giá trị của tham số m thì ta phải thử lại xem có thỏa mãn điều kiện đổi dấu của y' hay không.

Bài 5. Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+\left(m^2-m+2\right)x^2+\left(3m^2+1\right)x+m-5$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

Lời giải :

Ta có $\begin{cases} y'=x^2+2\left(m^2-m+2\right)x+3m^2+1 \\ y''=2x+2\left(m^2-m+2\right) \end{cases}$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ thì $\begin{cases} y'(-2)=0 \\ y''(-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2-2m>0 \\ 4m-m^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=4$.

Thử lại với $m=4$ thỏa mãn.

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

Bài 6. Tìm m để hàm số $y=\left(x-m\right)\left(x^2-3x-m-1\right)$ có cực đại và cực tiểu thỏa mãn $\left|x_{CD}.x_{CT}\right|=1$.

Lời giải :

Ta có $y'=3x^2-2\left(m+3\right)x+2m-1$

Hàm số có cực đại và cực tiểu thỏa mãn $\left|x_{CD}.x_{CT}\right|=1$ khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\left|x_1x_2\right|=1$, điều này tương đương với

$\begin{cases} \Delta'=m^2+7>0 \\ {x_1}^2{x_2}^2=\left(\dfrac{2m-1}{3}\right)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-1 \end{array}\right.$ là những giá trị cần tìm.

Bài 7. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+3)x^2+2(m+1)x+1$ có hai điểm cực trị với hoành độ lớn hơn 1.

<u>Lời giải :</u>

Ta có $y'=x^2-(m+3)x+2(m+1)$

$y'=0\Leftrightarrow x^2-(m+3)x+2(m+1)=0(*)$

Hàm số có 2 cực trị khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=m^2-2m+1>0\Leftrightarrow m\neq 1(i)$

Yêu cầu bài toán tương đương với (*) có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases}x_1>1\\x_2>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2>2\\(x_1-1)(x_2-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+3>2\\2(m+1)-m-3+1>0\end{cases}\Leftrightarrow m>0$$

Kết hợp với điều kiện (i) suy ra $0<m\neq 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 7. Cho hàm số $y=2x^3+mx^2-12x-13\left(C_m\right)$.

Tìm m để $\left(C_m\right)$ có cực đại và cực tiểu và các điểm này cách đều trục tung.

<u>Lời giải :</u>

Ta có $y'=2\left(3x^2+mx-6\right)$

Phương trình $y'=0$ có $\Delta=m^2+72>0$ nên hàm số luôn đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số cách đều trục tung khi và chỉ khi $|x_1|=|x_2|\Leftrightarrow x_1=-x_2\Rightarrow x_1+x_2=\frac{-m}{3}=0\Leftrightarrow m=0$.

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Bài 8. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+\left(m^2-3\right)x$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu sao cho $x_{CĐ},x_{CT}$ là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

<u>Lời giải :</u>

Ta có $y'=x^2-mx+m^2-3$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $y'=0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1,x_2 và thỏa mãn $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=\frac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4 - m^2 > 0 \\ S = m > 0 \\ P = m^2 - 3 > 0 \\ S^2 - 2P = m^2 - 2\left(m^2 - 3\right) = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m > 0 \\ m > \sqrt{3} \vee m < -\sqrt{3} \\ m = \pm\dfrac{\sqrt{14}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Vậy $m = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - 4$ nằm về hai phía trục tung.

Lời giải :

Để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu nằm về hai phía đối với trục tung khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow -3x^2 + 2(2m+1)x - (m^2 - 3m + 2)$ có hai nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow 3(m^2 - 3m + 2) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$

Vậy $m \in (1;2)$ là giá trị cần tìm.

Bài 10. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có cực đại, cực tiểu cách đều đường thẳng $y = x - 1$.

Lời giải :

Hàm số có cực trị khi và chỉ phương trình $y' = 3x^2 - 6x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$.

Khi đó gọi tọa độ hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

Lấy y chia cho y' ta được : $y = \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3}\right)y' - \left(\dfrac{2m}{3} + 2\right)x + 2 - \dfrac{m}{3}$

Do $y'(x_1) = y'(x_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\left(\dfrac{2m}{3} + 2\right)x_1 + 2 - \dfrac{m}{3} \\ y_2 = -\left(\dfrac{2m}{3} + 2\right)x_2 + 2 - \dfrac{m}{3} \end{cases}$

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $d: y=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x+2-\frac{m}{3}$.

Vậy để hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $y=x-1$ thì hoặc d song song với đường thẳng $y=x-1$ hoặc trung điểm của AB thuộc đường thẳng $y=x-1$.

Trường hợp 1 : $-\left(\frac{2m}{3}+2\right)=-1 \Leftrightarrow m=-\frac{3}{2}$

Trường hợp 2 : $\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}-1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{2m}{3}+2\right)\left(x_1+x_2\right)+2-\frac{m}{3}=\frac{x_1+x_2}{2}-1$

Theo định lý vi-ét ta có : $x_1+x_2=2 \Rightarrow -\left(\frac{2m}{3}+2\right)+2-\frac{m}{3}=1-1 \Leftrightarrow m=0$

Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện

Vậy $m\in\left\{0;-\frac{3}{2}\right\}$ là giá trị cần tìm.

Bài 11. Tìm m để cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

Lời giải :

Ta có $y'=3x^2-6mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$, vậy để hàm số có cực trị khi và chỉ khi $m\neq 0$

Khi đó gọi tọa độ hai điểm cực trị là $A\left(0;4m^3\right);B\left(2m;0\right)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(2m;-4m^3\right)$ và trung điểm của AB là $I\left(m;2m^3\right)$.

Vậy A,B đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y=x$ khi và chỉ khi $\begin{cases} AB\perp d \\ I\in d \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-4m^3=0 \\ 2m^3=m \end{cases} \Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ do $m\neq 0$.

Vậy $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 12. Tìm m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$ có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại đến gốc tọa độ bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu đến gốc tọa độ.

Lời giải :

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi pt $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=1>0,\forall m$.

Từ đó suy ra tọa độ các điểm cực trị là điểm cực đại $A\left(m-1;2-2m\right)$ và điểm cực tiểu $B\left(m+1;-2-2m\right)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$OA=\sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2+6m+1=0 \Leftrightarrow m=-3\pm 2\sqrt{2}$.

Bài 13. Tìm m để hàm số $y=x^3+\left(1-2m\right)x^2+\left(2-m\right)x+m+2$ có cực trị đồng thời hoành độ cực tiểu nhỏ hơn 1.

Lời giải :

Yêu cầu bài toán tương đương với pt $y'=3x^2+2\left(1-2m\right)x+2-m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2<1$.

Cách 1 :

ycbt tương đương với : $\begin{cases}\Delta'=4m^2-m-5>0\\ x_{CT}=\dfrac{2m-1+\sqrt{4m^2-m-5}}{3}<1\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{4}<m<\dfrac{7}{5}$

Cách 2 :

Đặt $g(x)=3x^2+2\left(1-2m\right)x+2-m$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases}\Delta'=4m^2-m-5>0\\ g(1)=-5m+7>0\\ \dfrac{S}{2}=\dfrac{2m-1}{3}<1\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{4}<m<\dfrac{7}{5}$$

Vậy $m\in\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{7}{5}\right)$ là giá trị cần tìm.

Bài 14. Tìm m để hàm số $y=x^3-3\left(m+1\right)x^2+3m\left(m+2\right)x-2+m$ có cực trị, đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại đến trục hoành bằng khoảng cách từ điểm cực tiểu đến trục tung.

Lời giải :

Ta có $y'=3x^2+6(m+1)x+3m(m+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=m+2\end{array}\right.$

Suy ra hàm số luôn có cực trị

Khi đó tọa độ điểm cực đại $A\left(m;m^3+3m^2+m-2\right)$ và điểm cực tiểu $B\left(m+2;m^3+3m^2+m-6\right)$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$\left|m^3+3m^2+m-2\right|=|m+2|\Leftrightarrow\left|(m+2)\left(m^2+m-1\right)\right|=|m+2|$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+2=0\\m^2+m-1=1\\m^2+m-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=-1\\m=1\\m=0\end{array}\right.$

Vậy có 4 giá trị cần tìm của m là $\{-2;-1;0;1\}$

Bài 15. Tìm các giá trị thực của tham số m để điểm cực đại, cực tiểu của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+\frac{4}{3}(m+1)^3$ nằm khác phía với đường tròn $(T): x^2+y^2-4x+3=0$

<u>Lời giải:</u>

Ta có $y'=x^2-2(m+1)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2(m+1)\end{array}\right.$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $m\neq-1$

Khi đó tọa độc hai điểm cực trị là $A\left(0;\frac{4}{3}(m+1)^3\right);B\left(2(m+1);0\right)$

Đường tròn (T) có tâm $I(2;0)$ bán kính $\mathbb{R}=1$

Hai điểm A,B nằm khác phía với đường tròn (T) khi và chỉ khi

$\left(IA^2-R^2\right)\left(IB^2-R^2\right)<0\Leftrightarrow\left(3+\frac{16}{9}(m+1)^6\right)\left(4m^2-1\right)<0$

$\Leftrightarrow 4m^2-1<0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện

Vậy $m\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ là những giá trị cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm m để hàm số $y=mx^3+3mx^2-(m-1)x-1$ có cực trị.

1.2. Tìm m để hàm số $y = x^4 + 3mx^2 + m^2 + m$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

1.3. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3(m-2)x^2 + (m-4)x + 2m - 1$ đạt cực đại tại $x = -1$.

1.4. Cho hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$. Với giá trị nào của tham số m để hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

1.5. Cho hàm số $y = x^4 + (m+3)x^3 + 2(m+1)x^2$. Chứng minh rằng với mọi $m \neq -1$ hàm số luôn có cực đại mà hoành độ không dương.

1.6. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{1}{2}$. Xác định m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại.

1.7. Chứng minh rằng với mọi tham số m hàm số $y = x^4 + mx^3 + mx^2 + mx + 1$ không đồng thời có cực đại và cực tiểu.

1.8. Tìm m để hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ chỉ có đúng 1 cực trị.

1.9. Tìm m để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ có cực đại x_1 và cực tiểu x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2^3 = 26$.

Đáp số : $m = -1$.

1.10. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m thì hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ luôn có cực đại, cực tiểu đồng thời khoảng cách giữa cực đại, cực tiểu không đổi.

1.11. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 9x - m - 1$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \le 2$.

1.12. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(5m+1)x - (4m^3 + 2)$. Tìm những giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x_0 \in (1;2]$.

Đáp số: $m \in \left[-\frac{1}{3};0\right)$.

1.13. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

Đáp số : $m \in (-\infty;3)$.

1.14. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + (m^2 - 3)x$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu sao cho $x_{CĐ}, x_{CT}$ là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

1.15. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - \frac{3m}{2}x^2 + m$ có cực đại, cực tiểu nằm vế hai phía đối với đường thẳng $x - y = 0$.

1.16. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x+m-2$ có cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $y=\frac{1}{2}x$.

1.17. Tìm điểm M trên đường thẳng $y=x-2$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

1.18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hoành độ các đểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=(m+2)x^3+3x^2+mx-5$ là các số dương.

1.19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hoành độ các điểm cực trị x_1,x_2 của đồ thị hàm số $y=4x^3+mx^2-3x$ thỏa mãn $x_1=-4x_2$.

1.20. Xác định m để hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$ đạt cực trị tại x_1,x_2 sao cho $|x_1-x_2|>\frac{1}{3}$.

1.21. Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m-2)x^2+(5m+4)x+3m+1$ đạt cực tại $x_1<x_2$ sao cho $x_1<2<x_2$.

1.22. Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{3}$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

1.23. Tìm m để hàm số $y=x^3+2(m-1)x^2+(m^2-4m+1)x-2(m^2+1)$ đạt cực đại, cực tiểu tại x_1,x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{2}$.

1.24. Tìm m để đồ thị hàm số $y=2x^3+9mx^2+12m^2x+1$ có cực đại, cực tiểu đồng thời ${x_{CĐ}}^2-x_{CT}=0$.

1.25. Tìm m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3+(m+1)x^2+(m^2+4m+3)x+1$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 sao cho $A=|x_1x_2-2(x_1+x_2)|$ đạt giá trị lớn nhất.

1.26. Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5m}{2}x^2-4mx-4$ đạt cực trị tại x_1,x_2 sao cho biểu thức $A=\frac{m^2}{{x_1}^2+5mx_2+12m}+\frac{{x_2}^2+5mx_1+12m}{m^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

1.27. Tìm m để hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ có cực trị, khi đó tìm quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng nối điểm cực đại và cực tiểu.

1.28. Tìm m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ nằm về hai phía đối với đường tròn $x^2+y^2-2mx-4my+5m^2-1=0$.

1.29. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x - 12m + 8$ có hai điểm cực trị $A;B$ sao cho tổng độ dài $MA + MB$ nhỏ nhất với $M(3;2)$.

1.30. Chứng minh rằng với mọi giá trị thực của tham sốm thì đồ thị hàm số $y = x^3 + 3(m+1)x^2 + 3m(m+2) + m^3 + 3m^2$ luôn có hai điểm cực trị ; đồng thời khoảng cách giữa hai điểm cực trị không đổi.

<u>**Dạng toán :**</u> **Đường thẳng đi qua điểm cực đại cực tiểu**

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm m để điểm $A(3;5)$ nằm trên đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m+6)x + 1$

<u>**Lời giải :**</u>

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - m - 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -2 \end{array}\right. \ (*)$$

Khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $M(x_1;y_1); N(x_2;y_2)$

Lấy y chia cho y' ta được : $y = \left(\frac{x}{3} - \frac{m}{3}\right)y' + 2(-m^2 + m + 6)x + m^2 + 6m + 1$

$$\text{Do } y'(x_1) = y'(x_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2(-m^2 + m + 6)x_1 + m^2 + 6m + 1 \\ y_2 = 2(-m^2 + m + 6)x_2 + m^2 + 6m + 1 \end{cases}$$

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là

$d: y = 2(-m^2 + m + 6)x + m^2 + 6m + 1$, theo đề bài $A(3;5) \in d$ nên

$5 = 6(-m^2 + m + 6) + m^2 + 6m + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\frac{8}{5} \end{array}\right.$ đối chiếu với điều kiện (*) suy ra chỉ nhận giá trị $m = 4$.

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Bài 2. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+1)x^2+mx$. Tìm m để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: 72x-12y-35=0$.

Lời giải :

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi pt $y'=x^2-(m+1)x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=(m+1)^2-4m>0 \Leftrightarrow m\neq 1$.

Khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $M(x_1;y_1); N(x_2;y_2)$

Lấy y chia cho y', ta được : $y=\left(\frac{x}{3}-\frac{m+1}{6}\right)y'-\frac{1}{6}(m-1)^2x+\frac{1}{6}m(m+1)$

Do $y'(x_1)=y'(x_2)=0 \Rightarrow \begin{cases} y_1=-\frac{1}{6}(m-1)^2x_1+\frac{1}{6}m(m+1) \\ y_2=-\frac{1}{6}(m-1)^2x_2+\frac{1}{6}m(m+1) \end{cases}$

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $d: y=-\frac{1}{6}(m-1)^2x+\frac{1}{6}m(m+1)$

Để M,N đối xứng nhau qua Δ thì trước tiên phải có

$d\perp\Delta \Leftrightarrow -\frac{1}{6}(m-1)^2.6=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$

❖ Với $m=0 \Rightarrow M(0;0); N\left(1;-\frac{1}{6}\right) \Rightarrow$ trung điểm của MN là $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{12}\right)\notin\Delta$. Nên loại $m=0$.

❖ Với $m=2 \Rightarrow M\left(1;\frac{5}{6}\right); N\left(2;\frac{2}{3}\right) \Rightarrow$ trung điểm của MN là $I\left(\frac{3}{2};\frac{9}{12}\right)\notin\Delta$. Nên loại $m=2$.

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m thì đồ thị hàm số $y=-x^3+3mx^2+3(1-m^2)x+m^3-m^2$ luôn có cực đại, cực tiểu đồng thời gọi $(x;y)$ là hoành độ, tung độ các điểm cực trị thì ta luôn có $2x-y+\frac{1}{4}\geq 0$.

Lời giải :

Ta có $y'=-3x^2+6mx+3(1-m^2)=0$, có $\Delta=1\ \forall$m. Nên luôn có hai nghiệm phân biệt hay hàm số luôn có cực trị với mọi m.

Khi đó gọi tọa độ hai điểm cực trị là $A(x_1;y_1); B(x_2;y_2)$

Lấy y chia cho y', ta được : $y=\left(\frac{x}{3}-\frac{m}{3}\right)y'+2x-m^2+m$

Do $y'(x_1)=y'(x_2)=0\Rightarrow\begin{cases}y_1=2x_1-m^2+m\\y_2=2x_2-m^2+m\end{cases}$

Nên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=2x-m^2+m$

Từ đó suy ra hoành độ, tung độ các điểm cực trị thỏa mãn $2x-y+\frac{1}{4}=m^2-m+\frac{1}{4}=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$. Từ đó ta có đpcm.

Bài 4. Chứng minh rằng với những giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}(m+1)x^2+3mx-\frac{1}{2}m(m+1)$ có cực đại, cực tiểu ; đồng thời gọi $(x;y)$ là tọa độ các điểm cực đại, cực tiểu thì ta luôn có $(x^3-y)x\geq 0$.

Lời giải :

Ta có $y'=3x^2-3(m+1)x+3m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=1\end{array}\right.$

Để hàm số có cực trị khi và chỉ khi $m\neq 1$.

Khi đó gọi tọa độ hai điểm cực trị là $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$

Lấy y chia cho y', ta được : $y=\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{6}(m+1)\right)y'-\frac{1}{2}(m-1)^2x$

Do $y'(x_1)=y'(x_2)=0\Rightarrow\begin{cases}y_1=-\frac{1}{2}(m-1)^2x_1\\y_2=-\frac{1}{2}(m-1)^2x_2\end{cases}$

Nên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=-\frac{1}{2}(m-1)^2x$

Từ đó suy ra hoành độ, tung độ các điểm cực trị thỏa mãn $(x^3-y)x=x^4+\frac{1}{2}(m-1)^2x^2\geq 0$. Từ đó ta có đpcm.

Bài 5. Với mỗi giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+m^2x+\frac{m^2}{9}$ có cực đại, cực tiểu ; đồng thời gọi $(x;y)$ là tọa độ các điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{y-x}{x+y}$.

Lời giải :

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=3x^2+2x+m^2=0$ có hai nghiệm phân biệt, khi và chỉ khi $\Delta'=1-3m^2>0 \Leftrightarrow 0\le m^2<\frac{1}{3}$

Khi đó gọi tọa độ hai điểm cực trị là $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$

Lấy y chia cho y', ta được : $y=\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\right)y'+\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{2}{9}\right)x$

Do $y'(x_1)=y'(x_2)=0 \Rightarrow \begin{cases} y_1=\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{2}{9}\right)x_1 \\ y_2=\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{2}{9}\right)x_2 \end{cases}$

Nên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{2}{9}\right)x$

Vậy $P=\dfrac{y-x}{x+y}=\dfrac{\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{2}{9}\right)x-x}{\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{2}{9}\right)x+x}=\dfrac{\frac{2}{3}m^2-\frac{11}{9}}{\frac{2}{3}m^2+\frac{7}{9}}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\frac{2}{3}t-\frac{11}{9}}{\frac{2}{3}t+\frac{7}{9}}$, với $t=m^2\in\left[0;\frac{1}{3}\right)$

Ta có $f(t)$ là hàm đơn điệu tăng trên $\left[0;\frac{1}{3}\right)$, nên suy ra $P=f(t)\ge f(0)=-\frac{11}{7}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{11}{7}$ khi $m=0$.

Bài 6. Tìm các giá trị thực của m để đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tiếp xúc với đường tròn $(T):(x-m)^2+(y-m-1)^2=5$

Lời giải :

Dễ thấy hai điểm cực trị là $A(0;1);B(2;-3)$, suy ra phương trình đi qua hai điểm cực trị của hàm số là $d:2x+y-1=0$

Đường tròn (T) có tâm $I(m;m+1)$ và bán kính $\mathbb{R}=\sqrt{5}$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$d(I;(d))=\sqrt{5}\Leftrightarrow \dfrac{|2m+m+1-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow m=\pm\frac{5}{3}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

Đáp số : $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$

1.2. Tìm m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ có cực đại, cực tiểu nằm trên đường thẳng $4x + y = 0$.

1.3. Tìm m để đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$ vuông góc với đường thẳng $3x - y - 7 = 0$.

1.4. Tìm những giá trị của tham số m để đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + (2m^2 - 3m + 2)x - m(m-1)$ tạo với đường thẳng $x + 4y - 20 = 0$ một góc bằng 45^0.

1.5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$ đối xứng nhau qua đường thẳng $x - 2y - 5 = 0$.

1.6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$ là nhỏ nhất.

1.7. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m thì đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ có cực đại, cực tiểu chạy trên một đường thẳng cố định.

1.8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ song song với đường thẳng $y = -4x + 3$.

1.9. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m thì đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$ luôn có cực đại, cực tiểu đồng thời gọi $(x;y)$ là hoành độ, tung độ các điểm cực trị thì ta luôn có $2x - y + \dfrac{1}{4} \geq 0$.

1.10. Chứng minh rằng với những giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - \dfrac{3}{2}(m+1)x^2 + 3mx - \dfrac{1}{2}m(m+1)$ có cực đại, cực tiểu ; đồng thời gọi $(x;y)$ là tọa độ các điểm cực đại, cực tiểu thì ta luôn có $(x^3 - y)x \geq 0$.

1.11. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}(m+1)x^2 + 3mx - \frac{1}{2}m(m+1)$ có cực đại, cực tiểu ; đồng thời hoành độ, tung độ các điểm cực trị thỏa mãn $\left(x - \frac{1}{2}y\right)\left(y - \frac{1}{2}x\right) \geq 0$; trong đó $(x; y)$ là tọa độ các điểm cực trị.

1.12. Chứng minh rằng với những giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}(m+1)x^2 + 3mx - \frac{1}{2}m(m+1)$ có cực đại, cực tiểu ; đồng thời gọi $(x; y)$ là tọa độ các điểm cực đại, cực tiểu thì ta luôn có $\frac{x-y}{x} > 1$.

1.13. Với mỗi giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + m^2x + \frac{m^2}{9}$ có cực đại, cực tiểu ; đồng thời gọi $(x; y)$ là tọa độ các điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{y-x}{x+y}$.

<u>Dạng toán</u>: Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác

Bài 1. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị là ba điểm của một tam giác vuông cân.

<u>Lời giải:</u>

Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x(x^2 - m^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{array}\right.$, vậy với $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số có 3 cực trị.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;1); B(-m;1-m^4); C(m;1-m^4)$, ta thấy B, C đối xứng với nhau qua trục tung. Vậy ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân thì sẽ vuông tại A.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-m;-m^4); \overrightarrow{AC} = (m;-m^4)$

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$, do $m \neq 0$.

Vậy $m = \pm 1$ là những giá trị cần tìm.

Bài 2. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị có bán kính bằng 1.

<u>Lời giải:</u>

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$, vậy đồ thị hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;1); B\left(-\sqrt{m};1-m^2\right); C\left(\sqrt{m};1-m^2\right)$

Gọi I là tâm và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do B,C đối xứng với nhau qua trục tung nên tam giác ABC cân tại A, do đó tâm I nằm trên Oy, giả sử :

$$I(0;y) \Rightarrow IA = R = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(y-1)^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow I_1(0;0); I_2(0;2)$$

Với $I_1(0;0) \Rightarrow I_1B = R = 1 \Leftrightarrow \sqrt{m + \left(1-m^2\right)^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \\ m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$, do $m > 0$ nên chỉ nhận $m = 1; m = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Với $I_2(0;2) \Rightarrow I_2B = R = 1 \Leftrightarrow \sqrt{m + \left(1+m^2\right)^2} = 1$, phương trình này vô nghiệm do $m > 0 \Rightarrow m + \left(1+m^2\right)^2 > 1$.

Vậy $m = 1; m = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ là hai giá trị cần tìm.

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$. Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm là O.

<u>Lời giải:</u>

Ta có $y' = x^3 - 2(3m+1)x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2(3m+1) \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi $3m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{3}$ (i)

Khi đó tọa độ 3 điểm cực trị là:

$A(0;2m+2), B\left(-\sqrt{6m+2};-9m^2-4m+1\right), C\left(\sqrt{6m+2};-9m^2-4m+1\right)$

Yêu cầu bài toán tương đương với:

$y_A + y_B + y_C = 0 \Leftrightarrow -18m^2 - 6m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{3}; m = -\dfrac{2}{3}$. Chỉ giá trị $m = \dfrac{1}{3}$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy $m=\frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Bài 4. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2\left(C_m\right)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\left(C_m\right)$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp đi qua điểm $D\left(\frac{3}{5};\frac{9}{5}\right)$.

Lời giải :

Ta có $y'=4x^3-4mx\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi $m>0$

Khi đó tọa độ 3 điểm cực trị là $A(0;2),B\left(-\sqrt{m};-m^2+2\right),C\left(\sqrt{m};-m^2+2\right)$

Gọi $I(x;y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó

$$\begin{cases}IA^2=ID^2\\IB^2=IC^2\\IA^2=IB^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y+1=0\\2x\sqrt{m}=-2x\sqrt{m}\\\left(x+\sqrt{m}\right)^2+\left(y-2+m^2\right)^2=x^2+(y-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0;y=1\\\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.\end{cases}$$

Do $m>0$ nên chỉ có $m=1$ thỏa mãn. Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Bài 5. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2\left(1-m^2\right)x^2+m+1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích lớn nhất.

Lời giải :

Ta có $y'=4x^3-4x\left(1-m^2\right)=4x\left(x^2-1+m^2\right)$. Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1-m^2>0\Leftrightarrow -1<m<1(i)$

Khi đó tọa độ 3 điểm cực trị là :

$A(0;1+m);B\left(-\sqrt{1-m^2};\sqrt{1-m^2}\right);C\left(\sqrt{1-m^2};\sqrt{1-m^2}\right)$

Ta có $BC=2\sqrt{1-m^2}$, phương trình đường thẳng $BC:y=\sqrt{1-m^2}$

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}d(A;BC).BC=\left(1-m^2\right)^2\sqrt{1-m^2}\le 1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=1$ (thỏa mãn (i)).

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Bài 6. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m^2-4$. Xác định m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

Lời giải :

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - m\right) = 0$. Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow m > 0$ (*)

Khi đó tọa độ 3 điểm cực trị của hàm số l :

$A\left(0; 2m^2 - 4\right), B\left(\sqrt{m}; m^2 - 4\right), C\left(-\sqrt{m}; m^2 - 4\right)$

Nhận thấy $A \in Oy; B, C$ đối xứng với nhau qua trục tung nên tam giác ABC cân tại A.

Kẻ $AH \perp BC$ khi đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}\left|y_A - y_B\right|\left|2x_B\right| = \frac{1}{2}m^2.2\sqrt{m} = 1 \Leftrightarrow m = 1$(thỏa mãn (*)).

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 7. Tìm m để hàm số $y = x^4 + (3m+1)x^2 - 3$ có ba cực trị, đồng thời ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ độ dài cạnh bên.

<u>Lời giải :</u>

Ta có $y' = 4x^3 + 2(3m+1)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\frac{3m+1}{2} \end{array}\right.$

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $-\frac{3m+1}{2} > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{3}$ (*)

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là

$A(0;-3); B\left(\sqrt{\frac{-3m-1}{2}}; -\frac{(3m+1)^2}{4} - 3\right); C\left(-\sqrt{\frac{-3m-1}{2}}; -\frac{(3m+1)^2}{4} - 3\right)$

Tam giác ABC cân tại A, vậy nên yêu cầu bài toán tương đương với $BC = \frac{2}{3}AB$

$\Leftrightarrow 9.4\left(\frac{-3m-1}{2}\right) = 4.\left(\frac{-3m-1}{2} + \frac{(3m+1)^4}{16}\right) \Leftrightarrow m = -\frac{5}{3}$ thỏa (*)

Vậy $m = -\frac{5}{3}$ là gía trị cần tìm của tham số m.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

1.2. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2m^2x^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32.

1.3. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng 120^0.

1.4. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

1.5. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

1.6. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

1.7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ làm trực tâm.

1.8. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

1.9. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m$. Xác định giá trị của tham số m để đồ thị hàm số trên có cực đại, cực tiểu tạo thành.

1. Một tam giác đều.
2. Một tam giác vuông.
3. Một tam giác có diện tích bằng 16.

1.10. Tìm tất cả các cặp số (m,n) sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + n$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác đều ngoại tiếp đường tròn có tâm là gốc tọa độ.

1.11. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba cực trị và đường tròn đi qua ba điểm này có bán kính bằng 1.

1.12. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$ với O là gốc tọa độ, A là điểm trên trục tung.

1.13. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ.

<u>Dạng toán:</u> Hai điểm cực trị và một điểm khác tạo thành một tam giác

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có cực đại, cực tiểu đồng thời các điểm cực đại, cực tiểu và gốc tọa độ tạo thành vuông tại O.

<u>Lời giải:</u>

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1)$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=9+9\left(m^2-1\right)>0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó gọi $A\left(x_1;y_1\right);B\left(x_2;y_2\right)$ là tọa độ hai điểm cực trị.

Lấy y chia cho y', ta được:

$y=\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)y'+2m^2x-2\left(m^2+1\right)$. Do $y'\left(x_1\right)=y'\left(x_2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} y_1=2m^2x_1-2\left(m^2+1\right) \\ y_2=2m^2x_2-2\left(m^2+1\right) \end{cases}$

Vậy tam giác OAB vuông tại $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+\left(2m^2x_1-2\left(m^2+1\right)\right)\left(2m^2x_2-2\left(m^2+1\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+4m^4x_1x_2-4\left(m^2+1\right)\left(x_1+x_2\right)+4\left(m^2+1\right)^2=0\ (*)$

Nhưng theo định lý vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=1-m^2 \end{cases}$, khi đó (*) trở thành

$\left(m^2-1\right)\left(3+4m^2-4m^4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 1 \\ m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$ tất cả các giá trị này đều thỏa mãn điều kiện $m\neq 0$.

Vậy $m\in\left\{\pm 1;\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 2. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+3\left(1-m\right)x+1+3m$ có cực đại, cực tiểu đồng thời các điểm cực đại, cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải:

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2-2x+1-m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=m>0$.

Khi đó gọi $A\left(x_1;y_1\right);B\left(x_2;y_2\right)$ là tọa độ hai điểm cực trị.

Lấy y chia cho y' ta được:

$y=\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)y'-2mx+2m+2$, do $y'\left(x_1\right)=y'\left(x_2\right)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1=-2mx_1+2m+2 \\ y_2=-2mx_2+2m+2 \end{cases} \Rightarrow AB: y=-2mx+2m+2$

Ta có $AB=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+4m^2\left(x_1-x_2\right)^2}=\left|x_1-x_2\right|\sqrt{4m^2+1}$; $d\left(O;AB\right)=\frac{\left|2m+2\right|}{\sqrt{1+4m^2}}$

Vậy $S_{OAB}=\frac{1}{2}.d\left(O;AB\right).AB=\left|x_1-x_2\right|.\left|m+1\right|=4$

$\Leftrightarrow 16=(m+1)^2\left((x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right)$ (*)

Theo định lý vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=1-m \end{cases}$, khi đó (*) trở thành $m(m+1)^2=4 \Leftrightarrow (m-1)(m^2+3m+4)=0 \Leftrightarrow m=1$ thỏa mãn điều kiện $m>0$

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Bài 3. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+m$. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A,B sao cho $\widehat{AOB}=120^0$.

<u>Lời giải :</u>

Ta có $y'=3x^2+6x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$

Tọa độ 2 điểm cực trị là $A(0;m);B(-2;m+4)$

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\cos\widehat{AOB}=\frac{\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}}{OA.OB}=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2m(m+4)=|m|\sqrt{m^2+8m+20} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{-12+\sqrt{132}}{3} \end{array}\right.$$

Bài 4. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ.

<u>Lời giải :</u>

Ta có $y'=-3x^2+6x+3(m^2-1)$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt, điều này tương đương với $\Delta'=9m^2>0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Giả sử A, B là hai điểm cực trị của hàm số, khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $A(1-m;-2-2m^3),B(1+m;-2+2m^3)$

A và B cách đều gốc tọa độ khi và chỉ khi $OA=OB \Leftrightarrow 8m^3=2m \Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}(m\neq 0)$.

Vậy $m=\pm\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 5. Tìm m để đồ thi hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m-1)x^2+(m-2)x+1$ có hai điểm cực trị A và B đồng thời tứ giác $OADB$ là hình bình hành, với O là gốc tọa độ và $D\left(3;\frac{7}{2}\right)$.

Lời giải :

Để hàm số có hai cực trị thì phương trình $y'=x^2-(m-1)x+m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=(m-1)^2-4(m-2)=(m-3)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 3$

Khi đó hoành độ hai điểm cực trị $x_A=1; x_B=m-2$

Vì tứ giác $OADB$ là hình bình hành nên trung điểm của AB cũng là trung điểm của OD, từ đó suy ra

$$\begin{cases} x_A+x_B=x_D \\ y_A+y_B=y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=3 \\ y_A+y_B=y_D \end{cases}$$

Suy ra $m=4 \Rightarrow A\left(1;\frac{11}{6}\right); B\left(2;\frac{5}{3}\right) \Rightarrow \frac{11}{6}+\frac{5}{3}=\frac{7}{2}$ thỏa mãn $y_A+y_B=y_D$

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

Bài 6. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+12mx-3m+4$ có hai điểm cực trị là A,B sao cho hai điểm này cùng với điểm $C\left(-1;-\frac{9}{2}\right)$ lập thành tam giác nhận gốc tọa độ làm trọng tâm.

Lời giải :

Ta có $y'=3x^2-6(m+1)x+12m$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

Tương đương với $\Delta'=(m+1)^2-4m>0 \Leftrightarrow m\neq 1$

Khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $A(2;9m); B\left(2m;-4m^3+12m^2-3m+4\right)$

Yêu cầu bài toan tương đương với

$$\begin{cases} 2+2m-1=0 \\ 9+-4m^3+12m^2-3m+4-\frac{9}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2} \text{ thỏa mãn}$$

Vậy $m=-\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4.

1.2. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - m^3 + m$ có cực trị đồng thời các điểm cực trị cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác vuông tại O.

1.3. Gọi A, B là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho diện tích tam giác MAB bằng 2.

1.4. Tìm m để đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

1.5. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x - 12m + 8$ và điểm $M(3;2)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

1.6. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3\left(m^2 - 1\right)x + 3m^2 + 1$ có hai điểm cực trị A, B cùng với điểm $C(2;1)$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

MỘT SỐ BÀI TẬP TỔNG HỢP VỀ CỰC TRỊ HÀM SỐ

1.1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng $4\sqrt{2}$, biết rằng $I(1;1)$.

1.2. Tìm tất các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3m(m+1)x - 1$ có 2 cực trị cùng dấu.

1.3. Tìm m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ cắt đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 4x - 2y + m = 0$ theo một dây cung có độ dài bằng $\frac{4\sqrt{30}}{5}$.

1.4. Tìm $m > 0$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có 2 điểm cực trị và khoảng các từ điểm cực tiểu đến đường thẳng d bằng 2 lần khoảng cách từ điểm cực đại tới d, biết rằng $d: y = x$.

1.5. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + m + 1$ luôn có hai điểm cực trị, đồng thời đường thẳng nối hai điểm cực trị tạo với trục hoành một góc không đổi.

CÁC BÀI TOÁN VỀ TIẾP TUYẾN

Xét hai bài toán cơ bản :

<u>Bài toán 1: Tiếp tuyến tại một điểm.</u>

Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M\left(x_0; f(x_0)\right)$ có dạng là $d: y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$

<u>Bài toán 2: Tiếp tuyến đi qua một điểm.</u>

Tiếp tuyến với đồ thị hàm số đi qua điểm $M\left(x_0; y_0\right)$ có hệ số góc k có dạng là $d: y = k\left(x - x_0\right) + y_0$

Khi đó hệ $\begin{cases} f\left(x\right) = k\left(x - x_0\right) + y_0 \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm, giải hệ này suy ra k. Từ đó viết phương trình của tiếp tuyến.

<u>Bài toán 3 :</u> Cho hai đường cong $\left(C\right): y = f(x)$ và $\left(d\right): y = g(x)$. Hãy tìm tất cả các tiếp tuyến chung của $\left(d\right), \left(C\right)$.

Giả sử $\left(\Delta\right)$ là tiếp tuyến chung của $\left(d\right), \left(C\right)$. Và $\left(\Delta\right)$ tiếp xúc với $\left(C\right), \left(d\right)$ lần lượt tại các điểm có hoành độ x_1, x_2.

Khi đó

$\left[\begin{array}{l} \left(\Delta\right): y = f'(x_1)\left(x - x_1\right) + f(x_1) \\ \left(\Delta\right): y = g'(x_2)\left(x - x_2\right) + g(x_2) \end{array}\right.$ từ đó ta có hệ phương trình

$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2) \end{cases}$ giải hệ này ra nghiệm x_1, x_2.

Từ đó viết phương trình tiếp tuyến chung: $\left(\Delta\right): y = f'(x_i)\left(x - x_i\right) + f(x_i)$.

<u>Một số kiến thức bổ sung :</u>

Hai đường thẳng $\left(d_1\right): y = k_1 x + m$ và $\left(d_2\right): y = k_2 x + n$

Khi đó :

1. $\left(d_1\right) // \left(d_2\right) \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ m \neq n \end{cases}$

2. $\left(d_1\right) \perp \left(d_2\right) \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$.

3. Góc tạo bởi hai đường thẳng này là : $\tan\alpha = \dfrac{\left|k_2 - k_1\right|}{\left|1 + k_1 k_2\right|}$.

<u>Lưu ý :</u> *Tại một điểm M thuộc đồ thị hàm số thì có thể tồn tại tiếp tuyến tại điểm hoặc tiếp tuyến đi qua điểm nó, vì vậy cần xem kỹ đề bài yêu cầu tìm loại tiếp tuyến nào để không bỏ sót tiếp tuyến.*

BÀI TẬP MẪU

<u>Dạng toán :</u> Viết phương trình tiếp tuyến thỏa mãn một số điều kiện cơ bản

- Tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị hàm số.
- Tiếp tuyến đi qua một điểm A cho trước.
- Tiếp tuyến song song(có cùng hệ số góc), vuông góc(tích hệ số góc bằng -1) hoặc tạo với một đường thẳng cho trước một góc α .

Bài 1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2+\frac{1}{3}(C_m)$.
Gọi M là điểm có hoành độ bằng -1 thuộc (C_m). Tìm m để tiếp tuyến với (C_m) tại M song song với đường thẳng $5x-y=0$. Viết phương trình tiếp tuyến đó.

<u>Lời giải:</u>

+ Hệ số góc của đường thẳng $5x-y=0$ là $k=5$. Để tiếp tuyến tại M song song với $d:5x-y=0$ suy ra $y'(-1)=m+1=5\Leftrightarrow m=4$. Suy ra $y(-1)=-2$.
Vậy tiếp tuyến cần tìm là $\Delta: y=5(x+1)-2\Leftrightarrow \Delta: y=5x+3$.
Vậy tiếp tuyến cần tìm là $5x-y+3=0$.

Bài 2. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x(C)$.
Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm uốn và chứng minh Δ là tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

<u>Lời giải:</u>

Ta có $y'=x^2-4x+3$ và $y''=2x-4\Rightarrow y''(x)=0\Leftrightarrow x=2$. Suy ra điểm $M\left(2;\frac{2}{3}\right)$ là điểm uốn của (C). Ta có $y'(2)=-1$. Vậy tiếp tuyến của (C) tại điểm uốn có phương trình là $y=-(x-2)+\frac{2}{3}\Leftrightarrow y=-x+\frac{8}{3}$.
Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại điểm bất kì là $k=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\geq -1$.
Từ đó suy ra đpcm.

Bài 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1(C)$.
Chứng minh rằng trên (C) tồn tại vô số cặp điểm mà mà hai tiếp tuyến với (C) tại từng cặp điểm song song với nhau.

Lời giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Bài toán trở thành chứng minh tồn tại vô số số k để phương trình $3x^2 - 6x = k(*)$ có hai nghiệm phân biệt.
Xét phương trình (*), có $\Delta' = 9 + 3k > 0 \Leftrightarrow k > -3$. Do đó mọi $k > -3$ thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt. Ta có đpcm.

Bài 4. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 8x + 5(C)$.
Chứng minh rằng không tồn tại tiếp tuyến tại hai điểm thuộc đồ thị hàm số mà vuông góc với nhau.

Lời giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 8 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{20}{3} > 0, \forall x(*)$.
+ Giả sử ngược lại tồn tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 thuộc đồ thị hàm số sao cho tiếp với đồ thị hàm số tại hai điểm đó vuông góc với nhau. Khi đó
$y'(x_1)y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \left(3{x_1}^2 - 4x_1 + 8\right)\left(3{x_2}^2 - 4x_2 + 8\right) = -1$, mâu thuẫn với (*).
Vậy ta có đpcm.

Bài 5. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2(1)$.
Tìm m để đồ thị hàm số (1) có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: x + y + 7 = 0$ một góc $\alpha, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

Lời giải:

+ Gọi hệ số góc của tiếp tuyến là k suy ra tiếp tuyến có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (k;-1)$, véc tơ pháp tuyến của d là $\overrightarrow{n_2} = (1;1)$.
Từ đó suy ra :
$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{2\left(k^2+1\right)}} \Leftrightarrow 12k^2 - 26k + 12 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \vee k = \frac{2}{3}.$$
Khi đó yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} y'=\dfrac{3}{2} \\ y'=\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+2(1-2m)x+2-m=\dfrac{3}{2} \\ 3x^2+2(1-2m)x+2-m=\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \text{có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'_1 \geq 0 \\ \Delta'_2 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8m^2-2m-1\geq 0 \\ 4m^2-m-3\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\geq \frac{1}{2} \vee m\leq -\frac{1}{4}.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $\left(-\infty;-\dfrac{1}{4}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Bài 6. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1\left(C_m\right)$. Tìm các giá trị của m sao cho tồn tại duy nhất một điểm có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x+2y-3=0$.

<u>Lời giải:</u>

+ Đường thẳng $x+2y-3=0$ có hệ số góc bằng $-\dfrac{1}{2}$ nên tiếp tuyến vuông góc với nó có hệ số góc bằng 2, khi đó ta có

$mx^2+2(m-1)x+(4-3m)=2 \Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+(2-3m)=0(*)$

Khi đó yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (*) có duy nhất một nghiệm âm.

+ Nếu $m=0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow -2x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ (loại).

+ Nếu $m\neq 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{2-3m}{m} \end{array}\right.$

Vậy (*) có duy nhất một nghiệm âm khi và chỉ khi $\dfrac{2-3m}{m}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$ là những giá trị cần tìm.

Bài 7. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+2}(C)$.

Tìm điểm những điểm thuộc đồ thị hàm số (C) sao cho khoảng cách từ giao điểm hai đường tiệm cận đến tiếp tuyến với (C) tại điểm đó có khoảng cách lớn nhất.

<u>Lời giải:</u>

+ Giao điểm hai đường tiệm cận $I(-2;2)$.

+ Giả sử điểm $A\left(a;\dfrac{2a}{a+2}\right)$ là điểm cần tìm, khi đó tiếp tuyến với (C) tại A là

$$d: y=\frac{4}{(a+2)^2}(x-a)+\frac{2a}{a+2} \Leftrightarrow d: 4x-(a+2)^2 y+2a^2=0$$

Ta có $d(I;d)=\dfrac{8|a+2|}{\sqrt{16+(a+2)^4}} \le \dfrac{8|a+2|}{\sqrt{2.4.(a+2)^2}}=2\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(a+2)^4=16 \Leftrightarrow a=0 \vee a=-4$

Vậy có hai điểm thỏa mãn $A(0;0), A_2(-4;4)$.

Bài 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ tồn tại đúng hai điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x+2y-3=0$.

<u>Lời giải :</u>

Ta có $y'=mx^2+2(m-1)x+4-3m$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $y'.\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+4-3m=2$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+2-3m=0$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ \Delta'=4m^2-4m+1>0 \\ S=\dfrac{2(1-m)}{m}>0 \\ P=\dfrac{2-3m}{m}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<m<\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}<m<\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Vậy $m\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)$ là giá trị cần tìm.

Bài 9. Tìm điểm A thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^4}{2}-3x^2+\dfrac{5}{2}$ (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B,C khác A sao cho $AC=3AB$ (B nằm giữa A và C).

<u>Lời giải</u> :

Xét điểm $A\left(a,\dfrac{a^4}{2}-3a^2+\dfrac{5}{2}\right)\in(C)$

Tiếp tuyến với (C) tại A có phương trình là :

$d: y=\left(2a^3-6a\right)(x-a)+\dfrac{a^4}{2}-3a^2+\dfrac{5}{2}$, khi đó hoành độ giao điểm của d và (C) là

$\left(2a^3-6a\right)(x-a)+\dfrac{a^4}{2}-3a^2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{x^4}{2}-3x^2+\dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow (x-a)^2\left(x^2+2ax+3a^2-6\right)=0$

Để $d\cap(C)$ tại hai điểm phân biệt khác A thì phương trình : $x^2+2ax+3a^2-6=0$ có hai nghiệm phân biệt khác a.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a^2+3a^2-6\neq 0 \\ \Delta'=6-2a^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}<a<\sqrt{3} \\ a\neq \pm 1 \end{cases}$

Khi đó gọi $B\left(x_B;y_B\right);C\left(x_C;y_C\right)$, có $AC=3AB$ (B nằm giữa A,C) nên $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow x_C-3x_B=-2a$, kết hợp với định lý vi-ét ta có hệ

$\begin{cases} x_C-3x_B=-2a \\ x_C+x_B=-2a \\ x_Cx_B=3a^2-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=0 \\ x_C=-2a \\ a=\pm\sqrt{2} \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện, suy ra có hai điểm $A_1\left(-\sqrt{2};-\dfrac{3}{2}\right);A_2\left(\sqrt{2};-\dfrac{3}{2}\right)$ cần tìm.

Bài 10. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ (C) tại điểm A thuộc (C), biết tiếp tuyến cắt trục hoành tại B và tam giác OAB vuông(O là gốc tọa độ).

Lời giải:

Xét điểm $A\left(a-1;\dfrac{a+2}{a}\right)\in(C), a\neq 0$. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm A có phương trình:

$d: y=-\dfrac{2}{a^2}(x-a+1)+\dfrac{a+2}{a}$

Hệ số góc của d là $k_1=-\dfrac{2}{a^2}$

Tam giác OAB vuông nên chỉ có thể vuông tại O hoặc A.

Trường hợp 1: Tam giác OAB vuông tại $O\Rightarrow A$ thuộc trục tung hay tiếp điểm $A(0;3)$. Suy ra tiếp tuyến $d_1: y=-2x+3$.

Trường hợp 2: Tam giác OAB vuông tại A

Hệ số góc của đường thẳng $OA: k_2 = \dfrac{\dfrac{a+2}{a} - 0}{a-1-0} = \dfrac{a+2}{a(a-1)}$

Vậy $k_1k_2 = -1 \Leftrightarrow \dfrac{-2}{a^2}.\dfrac{a+2}{a(a-1)} = -1 \Leftrightarrow (a+1)(a-2)(a^2+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=2 \end{array}\right.$

Với $a=-1 \Rightarrow d_2: y=-2x-5$

Với $a=2 \Rightarrow d_3: y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

Vậy tất cả có ba tiếp tuyến cần tìm là

$d_1: y=-2x+3; d_2: y=-2x-5; d_3: y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm m để khoảng cách từ điểm $M\left(\dfrac{3}{4};1\right)$ đến tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m$ (C) tại điểm A có hoành độ bằng 1 thuộc (C) đạt giá trị lớn nhất.
Đáp số: $m=1$.

1.2. Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y=-x^4+2mx^2-2m+1$ (C) luôn đi qua hai điểm cố định A, B với mọi m. Tìm m để tiếp tuyến với (C) tại A và B vuông góc với nhau.

1.3. Tìm m để trên đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+(4m+2)x+1$ tồn tại đúng một điểm mà tiếp tuyến tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $x+10y+30=0$.
Đáp số: $m=5$.

1.4. Đường thẳng $y=3-x$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+mx+4-m$ (C) tại A. Tìm m để tiếp tuyến với (C) tại A cắt (C) tại điểm B khác A thỏa mãn tam giác AIB vuông, với $I(1;2)$.

<u>Dạng toán :</u> Tiếp tuyến cùng với hai trục tọa độ tạo thành tam giác

Bài 1. Cho hàm số $y=x^3-mx+1-m\,(C_m)$.
Tìm m để tiếp tuyến với (C_m) tại giao điểm của (C_m) với trục tung, tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8.

<u>Lời giải:</u>

+ Tọa độ giao điểm M của (C_m) với trục tung là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 0 \\ y = x^3 - mx + 1 - m \end{cases} \Rightarrow M(0;1-m) \Rightarrow y'(0) = -m.$ Vậy phương trình tiếp tuyến với (C_m) tại điểm M là: $d: y = -mx + 1 - m$. Khi đó d cắt các trục tọa độ tại các điểm $M(0;1-m), N\left(\frac{1-m}{m};0\right)$. Yêu cầu bài toán tương đương với

$$S_{OMN} = \frac{1}{2}OM.ON = 8 \Leftrightarrow |1-m|\left|\frac{1-m}{m}\right| = 16 \Leftrightarrow (1-m)^2 = 16|m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \pm 4\sqrt{5} \\ m = -7 \pm 4\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy có 4 giá trị của m như trên thỏa mãn đề bài.

Bài 2. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}(C)$.
Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến cắt trục hoành tại A, trục tung tại B sao cho OAB là tam giác vuông cân, ở đây O là gốc tọa độ.

<u>Lời giải:</u>

Ta có $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2}$. Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = \pm x$. Vậy hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1.

Suy ra $-\frac{1}{(2x_0+3)^2} = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$

+ Khi $x_0 = -2 \Rightarrow y(-2) = 0$, lúc đó tiếp tuyến là $d: y = -(x+2) \Leftrightarrow d: y = -x - 2$.

+ Khi $x_0 = -1 \Rightarrow y(-1) = 1$, lúc đó tiếp tuyến là $y = -x$, không cắt các trục tọa độ tại hai điểm nên loại.

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $d: y = -x - 2$.

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}(C)$.
Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{4}$, ở đây O là gốc tọa độ.

<u>Lời giải:</u>

+ Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0}{x_0+1}\right)\in(C)$ là điểm cần tìm. Khi đó tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là:

$d: y=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0}{x_0+1}\Leftrightarrow d: y=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}x+\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}$

Từ đó suy ra $A(-x_0^2;0), B\left(0;\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right)$.

Ta có $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow OA.OB=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow |x_0^2|\left|\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\ x_0=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

+ Với $x_0=1\Rightarrow M_1(1;1)$.

+ Với $x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow M_2\left(-\dfrac{1}{2};-2\right)$.

Vậy có hai điểm $M_1(1;1), M_2\left(-\dfrac{1}{2};-2\right)$ cần tìm.

Bài 4. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+1$ biết tiếp tuyến cắt các trục tọa độ tại A, B sao cho tam giác OAB cân tại O (với O là gốc tọa độ).

Lời giải :

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(x_0;x_0^3-x_0^2+1\right)$ thuộc đồ thị hàm số

$d: y=\left(3x_0^2-2x_0\right)(x-x_0)+x_0^3-x_0^2+1$

Khi đó giao điểm của d với Ox là $A\left(\dfrac{2x_0^3-x_0^2-1}{3x_0^2-2x_0};0\right)$, giao điểm của d với Oy là $B\left(0;-2x_0^3+x_0^2+1\right)$.

Tam giác OAB cân tại O nên $OA=OB$

$\Leftrightarrow\left|\dfrac{2x_0^3-x_0^2-1}{3x_0^2-2x_0}\right|=\left|-2x_0^3+x_0^2+1\right|$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2x_0^3-x_0^2-1}{3x_0^2-2x_0}=-2x_0^3+x_0^2+1\\ \dfrac{2x_0^3-x_0^2-1}{3x_0^2-2x_0}=2x_0^3-x_0^2-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\ x_0=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

Với $x_0=1\Rightarrow A\equiv B\equiv O\Rightarrow$ loại trường hợp này.

Với $x_0 = -\frac{1}{3}$ ta có tiếp tuyến $d: y = x + \frac{32}{27}$.

Bài 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 1 của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{3}{2}$.

Lời giải :

- Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 1 là $d: y = -3x + m + 2$.
- Khi đó d cắt Ox tại $A\left(\frac{m+2}{3};0\right)$ và cắt Oy tại $B(0;m+2)$
- Vậy $S_{OAB} = \frac{1}{2}\left|\frac{m+2}{3}\right||m+2| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (m+2)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-5 \end{array}\right.$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Viết phương trình tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ biết rằng tiếp tuyến này tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân.

1.2. Viết phương trình tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ biết rằng tiếp tuyến này tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{6}$.

1.3. Viết phương trình tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$ biêt rằng tiếp tuyến tạo với hai trục tọa một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $4x + y = 0$.

1.4. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - (2m+1)x^2 + (m+2)x + \frac{1}{3}$ tại giao điểm đồ thị hàm số với trục tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{3}$.

Dạng toán : **Số tiếp tuyến đi qua một điểm đến đồ thị hàm số**

- Viết phương trình tiếp tuyến đi qua một điểm cho trước đến đồ thị hàm số.
- Tìm những điểm trên mặt phẳng tọa độ kẻ được một, hai, ba hoặc không có tiếp tuyến nào đi qua đến đồ thị hàm số.

Bài 1. Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1\left(C\right)$.

Viết phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right)$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $M\left(-1;-9\right)$.

<u>Lời giải:</u>

\+ Phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right)$ đi qua điểm $M\left(-1;-9\right)$ có hệ số góc k là $d: y = k\left(x+1\right) - 9$, gọi x là hoành độ tiếp điểm, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} 4x^3 - 6x^2 + 1 = k\left(x+1\right) - 9 (1) \\ 12x^2 - 12x = k (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được: $4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x+1\right)^2\left(4x-5\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \dfrac{5}{4}$

\+ Với $x = -1 \Rightarrow k = 24 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $d: y = 24x + 15$.

\+ Với $x = \dfrac{5}{4} \Rightarrow k = \dfrac{15}{4} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $d: y = \dfrac{15}{4}x - \dfrac{21}{4}$.

Vậy hai tiếp tuyến cần tìm là $d_1: 24x - y + 15 = 0$ và $d_2: 15x - 4y - 21 = 0$.

Bài 2. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \dfrac{3}{2}\left(C\right)$.

Viết phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right)$ biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $M\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

<u>Lời giải:</u>

\+ Phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right)$ đi qua điểm $M\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ có hệ số góc k là $d: y = kx + \dfrac{3}{2}$, gọi x là hoành độ tiếp điểm, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \dfrac{3}{2} = kx + \dfrac{3}{2} (1) \\ 2x^3 - 3x = k (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$x^2\left(x^2 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}$.

\+ Với $x = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $d: y = \dfrac{3}{2}$.

\+ Với $x = \sqrt{2} \Rightarrow k = \sqrt{2} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $d: y = \sqrt{2}x + \dfrac{3}{2}$.

\+ Với $x = -\sqrt{2} \Rightarrow k = -\sqrt{2} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $d: y = -\sqrt{2}x + \dfrac{3}{2}$.

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=|x|^3-3|x|+2\,(C)$ kẻ từ điểm $A(0;2)$.

Lời giải:

+ Nhận thấy $A(0;2)\in(C)$.
+ Xét tiếp tuyến với (C) tại A, ta có

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}\left(x^2-3\right)=\begin{cases}-3\left(x\to 0^+\right)\\ =3\left(x\to 0^-\right)\end{cases}\Rightarrow$ không tồn tại $y'(0)$. Vậy không có tiếp tuyến với (C) tại A.

+ Xét tiếp tuyến có hệ số góc k đi qua A có phương trình là $d: y=kx+2$

Do (C) đối xứng qua trục tung nên chỉ cần xét trên khoảng $(0;+\infty)$, khi đó $y=x^3-3x+2$ và ta có hệ $\begin{cases}x^3-3x+2=kx+2\\3x^2-3=k\end{cases}$ có nghiệm

Hệ này vô nghiệm trên $(0;+\infty)$. Vậy không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua A.

Kết luận: Không có tiếp tuyến nào kẻ từ A đến (C).

Bài 4. Cho hàm số $y=x^3-3x+2\,(C)$.
Tìm điểm M trên (C) sao cho chỉ có một tiếp tuyến với (C) đi qua M.

Lời giải:

Giả sử điểm $M\left(x_0;x_0^3-3x_0+2\right)\in(C)$. Phương trình tiếp tuyến với (C) đi qua M có dạng $y=k\left(x-x_0\right)+x_0^3-3x_0+2$, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases}x^3-3x+2=k\left(x-x_0\right)+x_0^3-3x_0+2(1)\\3x^2-3=k(2)\end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$2x^3-3x_0x^2+x_0^3=0\Leftrightarrow\left(x-x_0\right)^2\left(2x+x_0\right)=0(*)$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x_0\Leftrightarrow\dfrac{-x_0}{2}=x_0\Leftrightarrow x_0=0\Rightarrow M(0;2)$.

Bài 5. Tìm các điểm trên trục hoành sao cho từ đó vẽ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+3x^2$, trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Lời giải:

Giả sử $M\left(x_0;0\right)$ là điểm cần tìm, khi đó tiếp tuyến với (C) đi qua M có dạng là $d: y=k\left(x-x_0\right)$, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} x^3+3x^2=k\left(x-x_0\right)(1) \\ 3x^2+6x=k(2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$2x^3+3\left(1-x_0\right)x^2-6xx_0=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $2x^2+3\left(1-x_0\right)x-6x_0=0(*)$

Kí hiệu, $g(x)=2x^2+3\left(1-x_0\right)x-6x_0$

Từ M kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C) khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, khác không.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9{x_0}^2+30x_0+9>0 \\ g(0)=-6x_0\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0<-3 \\ -\dfrac{1}{3}<x_0\neq 0 \end{array}\right.(1)$$

Tại điểm $M(0;0)$ tiếp tuyến với đồ thị hàm số chính là trục hoành, dễ thấy không có tiếp tuyến nào vuông góc với tiếp tuyến này.Khi đó yêu cầu bài toán trở thành tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại các điểm có hoành độ x_1,x_2 (x_1,x_2 là nghiệm của (*)) vuông góc với nhau.

Hệ số góc của các tiếp tuyến này là $k_1=3{x_1}^2+6x_1;k_2=3{x_2}^2+6x_2$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $k_1.k_2=-1\Leftrightarrow\left(3{x_1}^2+6x_1\right)\left(3{x_2}^2+6x_2\right)=-1\Leftrightarrow 9\left(x_1x_2\right)^2+18x_1x_2\left(x_1+x_2\right)+36x_1x_2=-1(2)$ Theo định lí Vi-ét ta có: $x_1+x_2=\dfrac{3\left(x_0-1\right)}{2};x_1x_2=-3x_0$, khi đó (2) trở thành

$-27x_0+1=0\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{27}\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{27};0\right)$ là điểm duy nhất cần tìm.

Bài 6. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}(C)$. Tìm những điểm trên trục tung kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành.

Lời giải:

+ Giả sử $A(0;a)$ là điểm cần tìm, đường thẳng đi qua A với hệ số góc k là $d: y=kx+a$.

d tiếp xúc với $(C)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1}=kx+a \\ \dfrac{-3}{(x-1)^2}=k\end{cases}$ có nghiệm

$\Leftrightarrow PT:(1-a)x^2+2(a+2)x-(a+2)=0(*)$ có nghiệm $x\neq 1$.

Kí hiệu: $g(x)=(1-a)x^2+2(a+2)x-(a+2)$, từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2, khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a\neq 0 \\ \Delta'=3a+6>0 \\ g(1)=3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<a\neq 1(1).$$

Khi đó ta có $y_1=1+\frac{3}{x_1-1}, y_2=1+\frac{3}{x_2-1}$. Để hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành khi và chỉ khi $y_1y_2<0 \Leftrightarrow \left(1+\frac{3}{x_1-1}\right)\left(1+\frac{3}{x_2-1}\right)<0 \Leftrightarrow \frac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}<0(2)$

Theo định lí Vi-ét ta có: $x_1+x_2=\frac{2(a+2)}{a-1}; x_1x_2=\frac{a+2}{a-1}$, khi đó (2) trở thành

$3a+2>0 \Leftrightarrow a>-\frac{2}{3}$. Kết hợp với điều kiện (1) suy ra $-\frac{2}{3}<a\neq 1$.

Vậy những điểm trên trục tung có hoành độ x thỏa mãn $-\frac{2}{3}<x\neq 1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x-2}$ (C) và hai điểm $A(4;2); B\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để từ A kẻ được hai tiếp tuyến AM, AN đến (C)(M, N là các tiếp điểm) sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN bằng $\sqrt{5}$.

1.2.

<u>Dạng toán:</u> Tiếp tuyến cắt hai đường tiệm cận

Bài 1. Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}(C)$. Tìm những điểm trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại điểm đó cắt hai tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B sao cho độ dài AB nhỏ nhất.

<u>Lời giải:</u>

+ Giả sử điểm $M\left(m;2+\frac{1}{m-2}\right)$ là điểm cần tìm, khi đó tiếp tuyến với (C) tại M có phương trình là: $d: y=-\frac{1}{(m-2)^2}(x-m)+2+\frac{1}{m-2}$

+ Giao điểm của d với tiệm cận đứng là $A\left(2;2+\frac{2}{m-2}\right)$.

+ Giao điểm của d với tiệm cận ngang là $B(2m-2;2)$.

Ta có $AB^2=4\left[(m-2)^2+\frac{1}{(m-2)^2}\right]\ge 8\sqrt{(m-2)^2.\frac{1}{(m-2)^2}}=8$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(m-2)^2=\frac{1}{(m-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=3\end{array}\right.$

Vậy có hai điểm cần tìm là $M_1(1;1),M_2(3;3)$.

Bài 2. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}(C)$.

Tìm trên (C) những điểm mà tiếp tuyến với (C) tại điểm đó cắt các đường tiệm cận của (C) tại A,B sao cho tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất(I là giao điểm của hai đường tiệm cận hàm số).

<u>Lời giải:</u>

+ Giả sử điểm $M\left(m;2+\frac{3}{m-1}\right)\in(C)$ là điểm cần tìm, tọa độ $I(1;2)$.

+ Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $d:y=\frac{-3}{(m-1)^2}(x-m)+2+\frac{3}{m-1}$.

+ Tọa độ giao điểm của d với các tiệm cận của (C) là $A\left(1;2+\frac{6}{m-1}\right),B(2m-1;2)$

+ Tam giác IAB vuông tại I , ta có $IA=\frac{6}{|m-1|};IB=2|m-1|\Rightarrow IA.IB=12.$

Chu vi tam giác IAB bằng :

$p=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}\ge 2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2IA.IB}=4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $IA=IB\Leftrightarrow(m-1)^2=3\Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{3}$.

Vậy có hai điểm $M_1\left(1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right),M_2\left(1-\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+3mx^2+(m+1)x+1$ tại điểm có hoành độ $x=-1$ đi qua điểm $A(1;2)$.

1.2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+(m-2)x+3m$ đi qua điểm $A\left(1;-\dfrac{55}{27}\right)$.

1.3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến tại hai điểm cố định thuộc đồ thị hàm số $y=-x^4+2mx^2-2m+1$ vuông góc với nhau.

1.4. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$ (C). Tìm hai điểm A,B thuộc (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại A,B song song với nhau và $AB=4\sqrt{2}$.

1.5. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-mx+m-1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-3)^2=\dfrac{1}{5}$ theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

1.6. Tìm các giá trị thực của tham số m để từ điểm $M(1,2)$ kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m$.

1.7. Tìm tất cả các giá trị của k để tồn tại hai tiếp tuyến phân biệt với đồ thị hàm số $y=x^3+6x^2+9x+3$ có cùng hệ số góc k, sao cho đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến cắt các trục tọa độ Ox,Oy lần lượt tại A,B thỏa mãn $OA=2012OB$.

1.8. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-mx+m-1$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ cắt đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-3)^2=4$ theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

1.9. Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $(C_m):y=x^3-2x^2+(m-2)x+3m$ đi qua điểm $A\left(1,-\dfrac{55}{27}\right)$.

1.10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để trên đồ thị hàm số $(C_m):y=\dfrac{m}{3}x^3+(m-1)x^2+(4-3m)x$ tồn tại đúng hai điểm có hoành độ dương sao cho tiếp tuyến của đồ thị tại đó vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

1.11. Tìm những điểm trên trục hoành kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $(C):y=-x^3+3x+2$.

Tương tự :

1. Tìm tất cả các điểm trên trục hoành kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $(C): y = x^3 + 3x^2$ biết có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

2. Tìm trên đường thẳng $y = 2$ các điểm kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x(C)$.

3. Cho hàm số $y = 3x - x^3$ (C). Tìm trên đường thẳng $y = -x$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến phân biệt đến (C).

4. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ (C). Tìm những điểm thuộc đường thẳng $y = 2$ mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt đến (C).

5. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ (C). Tìm những điểm trên trục hoành kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt đến (C).

6. Tìm những điểm trên trục tung kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $(C): y = x^4 - x^2 + 1$.

1.12. Tìm hai điểm A, B phân biệt thuộc đồ thì hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 2$ sao cho tiếp tuyến tại A, B song song vơi nhau và đường thẳng đi qua hai điểm đó vuông góc với đường thẳng $x + y + 2012 = 0$.

1.13. Cho hàm số $y = x^3 - 2011x(C)$. Tiếp tuyến của (C) tại điểm M_1 (có hoành độ bằng $x_1 = 1$) cắt (C) tại điểm $M_2 \neq M_1$, tiếp theo tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) ở điểm $M_3 \neq M_2$ và cứ như vậy tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) ở điểm $M_n \neq M_{n-1} (3 \leq n \in \mathbb{N})$. Giả sử điểm $M_n(x_n, y_n)$, hãy tìm n để $2011x_n + y_n = 2^{2012}$.

1.14. Chứng minh rằng đồ thị hàm số $(C_m): y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ luôn đi qua hai điểm cố định. Tìm m để tiếp tuyến tại hai điểm cố định đó vuông góc với nhau.

1.15. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2(C)$. Trên (C) lấy hai điểm A, B có hoành độ tương ứng là a, b. Tìm điều kiện của a và b sao cho tiếp tuyến với (C) tại A, B song song với nhau.

1.16. Tìm điểm $A \in (C): y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C khác A sao cho $AC = 3AB$ (B nằm giữa A, C).

1.17. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-2}$ (C) biết tiếp tuyến cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm M, N sao cho $MN = OM\sqrt{2}$ với O là gốc tọa độ.

1.18. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ (C) biết tiếp tuyến cắt các trục tọa độ tại A, B sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác OAB lớn nhất.

1.19. Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+3}{x-m}(C_m)$. Tìm những giá trị thực của tham số m để tiếp tuyến của (C_m) cắt hai đường tiệm cận của (C_m) tại A, B sao cho tam giác IAB có diện tích bằng 64(I là giao điểm của hai đường tiệm cận).

1.20. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ (C) biết tiếp tuyến tạo với hai đường tiệm cận một giác có chu vi bằng $4+2\sqrt{2}$.

1.21. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ (C) biết tiếp tuyến cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho đường trung trực của AB đi qua gốc tọa độ.

1.22. Tìm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ hai điểm A, B phân biệt sao cho tiếp tuyến tại hai điểm có song song với nhau và độ dài đoạn AB lớn nhất.

1.23. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để tồn tại ít nhất một điểm thuộc đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x+1}{2x-1}$ biết tiếp tuyến tại điểm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $y=2m-1$.

1.24. Tìm trên hai nhánh của đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ hai điểm M, N sao cho tiếp tuyến tại hai điểm đó cắt các đường tiệm cận tạo thành một hình thang.

1.25. Cho hàm số $(C): y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ và điểm M bất kỳ thuộc (C), gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. tiếp tuyến tại M cắt hai đường tiệm cận tại A, B.

1. Chứng minh M là trung điểm của AB.
2. Chứng minh diện tích tam giác IAB không đổi.
3. Tìm m để chu vi tam giác IAB nhỏ nhất.

1.26. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ tại điểm thuộc đồ thị mà có khoảng cách đến đường thẳng $3x+4y-2=0$ bằng 2.

1.27. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C). Tìm trên (C) những điểm mà tiếp tuyến với (C) tại điểm đó cắt các đường tiệm cận của (C) tại A,B sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB nhỏ nhất.

1.28. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C). Tìm trên (C) những điểm mà tiếp tuyến với (C) tại điểm đó cắt các đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A,B sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IAB lớn nhất(I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C)).

1.29. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ (C). Chứng minh rằng tiếp tuyến với (C) tại điểm M bất kỳ trên (C) luôn cắt các đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A,B và M là trung điểm của AB.

1.30. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ (C). Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của (C) tại điểm bất kỳ thuộc (C) luôn tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

1.31. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ (C). Gọi d là một tiếp tuyến bất kỳ của (C), I là giao điểm của hai đường tiệm cận . Viết phương trình đường thẳng d biết khoảng cách từ I đến d là lớn nhất.

1.32. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C). Tìm những điểm trên trục tung những điểm kẻ được duy nhất một tiếp tuyến đến (C).

1.33. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đó cách đều hai điểm $A(2;4),B(-4;-2)$.

1.34. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\in(C)$ biết rằng tiếp tuyến đó cắt các tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt tại A,B sao cho côsin góc $\widehat{ABI}$ bằng $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$, với I là giao điểm hai đường tiệm cận.

1.35. Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ (C), biết d cắt hai đường tiệm cận của (C) tại A,B.

1. Diện tích tam giác IAB lớn nhất(với I là giao điểm của hai đường tiệm cận).

2. Độ dài đoạn thẳng $AB = 2\sqrt{10}$.

1.36. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ biết tiếp tuyến cách đều hai điểm $A(2;4)$ và $B(-4;-2)$.

1.37. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$, biết tiếp tuyến cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho trung trực của AB đi qua gốc tọa độ.

CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT THUỘC ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Xác định các điểm thuộc đồ thị hàm số có tính chất đặc biệt:

Lưu ý:

- Tâm đối xứng của hàm bậc ba là điểm uốn, tâm đối xứng của hàm phân thức là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Các bài toán:

- Tìm điểm cố định thuộc đồ thị hàm số hoặc quỹ tích các điểm cố định.
- Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng qua một điểm hoặc qua một đường thẳng cho trước.
- Tìm điểm thuộc đồ thị hàm số có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận hoặc đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất.
- Tìm điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số sao cho khoảng cách giữa chúng nhỏ nhất.
- Tìm những điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số(với hàm phân thức).
- Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - \dfrac{11}{3}(C)$. Tìm trên (C) hai điểm phân biệt M, N đối xứng với nhau qua trục tung.

Lời giải:

+ giả sử điểm $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2) \in (C)$. Khi đó M, N đối xứng với nhau qua trục tung khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \neq 0 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ -\frac{1}{3}x_1^3 + x_1^2 + 3x_1 - \frac{11}{3} = -\frac{1}{3}x_2^3 + x_2^2 + 3x_2 - \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

vậy có hai điểm cần tìm là $M\left(3;\frac{16}{3}\right), N\left(-3;\frac{16}{3}\right)$.

Bài 2. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}(C)$. Lập phương trình đường cong (C') đối xứng với (C) qua điểm $I(0;2)$.

Lời giải:

Lấy điểm $M(x;y) \in (C) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$ (i)

Điểm $M'(x';y')$ đối xứng với M qua điểm $I(0;2)$ nên $\begin{cases} x = -x' \\ y = 4 - y' \end{cases}$ thay vào (i) ta được

$$4 - y' = \frac{1}{2}x'^4 - 3x'^2 + \frac{5}{2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}x'^4 + 3x'^2 + \frac{3}{2}(C')$$

Bài 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4(C_m)$. Tìm m để (C_m) nhận điểm $I(1;2)$ làm tâm đối xứng.

Lời giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3m \Rightarrow y'' = 6x - 6 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6m + 2 \end{cases}$

Điểm uốn của đồ thị hàm số là tâm đối xứng $U(1;6m+2)$

Yêu cầu bài toán tương đương với $6m + 2 = 2 \Leftrightarrow m = 0$ là giá trị cần tìm.

Bài 4. Cho hàm số $y = (m+2)x^3 - 3(m-2)x + m + 7(C_m)$. Chứng minh rằng với mọi m đường cong (C_m) luôn đi qua 3 điểm cố định thuộc một đường thẳng.

Lời giải:

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định thuộc đường cong (C_m). Khi đó ta có

$$y_0 = (m+2)x_0^3 - 3(m-2)x_0 + m + 7, \forall m$$

$\Leftrightarrow m\left(x_0^3 - 3x_0 + 1\right) + 2x_0^3 + 6x_0 + 7 - y_0 = 0, \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 3x_0 + 1 = 0 \\ 2x_0^3 + 6x_0 + 7 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 3x_0 + 1 = 0 (1) \\ y_0 = 2\left(3x_0 - 1\right) + 6x_0 + 7 = 12x_0 + 5 (2) \end{cases}$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $f(0) = 1 > 0; f(1) = -3 < 0; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

từ đó suy ra phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Và từ (2) suy ra cả 3 nghiệm này đều thuộc đường thẳng $y = 12x + 5$. Ta có đpcm.

Bài 5. Tìm hai điểm trên đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ đối xứng nhau qua điểm $M(-1;3)$

Lời giải:

Giả sử điểm $A\left(x_0; y_0\right) \in (C)$, điểm B đối xứng với A qua $M(-1;3)$ nên $B\left(-2 - x_0; 6 - y_0\right)$

Nhưng do $A, B \in (C)$ nên:

$\begin{cases} y_0 = -x_0^3 + 3x_0 + 2 \\ 6 - y_0 = -\left(-2 - x_0\right)^3 + 3\left(-2 - x_0\right) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1;0); B(-1;6)$

Vậy $A(-1;0)$ và $B(-1;6)$ là hai điểm cần tìm.

Bài 6. Tìm trên đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ hai điểm đối xứng qua đường thẳng $d: 2x - y + 2 = 0$.

Lời giải:

Giả sử hai điểm $M\left(x_1; y_1\right); N\left(x_2; y_2\right)$ thuộc đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $d: 2x - y + 2 = 0$.

Khi đó trung điểm I của MN cũng thuộc d: $\begin{cases} I\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right) \in d \\ MN \perp d \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x_2 - x_1\right) + 2\left(y_2 - y_1\right) = 0 \\ \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{-x_1^3 + 3x_1 + 2 + -x_2^3 + 3x_2 + 2}{2} = 2.\dfrac{x_1 + x_2}{2} + 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7\left(x_2 - x_1\right) - 2\left(x_2 - x_1\right)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) = 0 \\ -\left(x_2 + x_1\right)^3 + 3x_1x_2\left(x_2 + x_1\right) + 3\left(x_2 + x_1\right) = 2\left(x_2 + x_1\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \dfrac{7}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x_2 + x_1 = 0 \\ x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{\dfrac{7}{2}} \\ x_2 = \mp\sqrt{\dfrac{7}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \mp \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}} \\ y_2 = 2 \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm cần tìm là $M\left(\sqrt{\dfrac{7}{2}}; 2 - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right); N\left(-\sqrt{\dfrac{7}{2}}; 2 + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)$.

Bài 7. Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$ (C) cách đều hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử điểm $M\left(x; \dfrac{3x-4}{x-2}\right) \in (C)$, vậy M cách đều hai đường tiệm cận của (C) khi và chỉ khi:

$$|x-2| = \left|\frac{3x-4}{x-2} - 3\right| \Leftrightarrow |x-2| = \left|\frac{x}{x-2}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{x-2} = x-2 \\ \dfrac{x}{x-2} = 2-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(1;1) \\ M(4;6) \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm cần tìm $M_1(1;1); M_2(4;6)$.

Bài 8. Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x-1}$ cách đều hai điểm $A(2;0); B(0;2)$.

<u>Lời giải:</u>

Phương trình đường trung trực của AB là $d: y = x$

Khi đó điểm M thuộc đồ thị hàm số cách đều hai điểm A, B có tọa độ là nghiệm của phương trình:

$$\frac{x+2}{2x-1} = x \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right); M_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Bài 9. Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$ (C) sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận của (C) là nhỏ nhất.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử điểm $M\left(x_0;\dfrac{2x_0}{x_0+1}\right)\in(C)$, khi đó tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (C) là:

$$|x_0+1|+\left|\frac{2x_0}{x_0+1}-2\right|=|x_0+1|+\left|\frac{2}{x_0+1}\right|\geq 2\sqrt{|x_0+1|.\left|\frac{2}{x_0+1}\right|}=2\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$|x_0+1|=\left|\frac{2}{x_0+1}\right|\Leftrightarrow(x_0+1)^2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1+\sqrt{2}\\x_0=-1-\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}M\left(-1+\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right)\\M\left(-1-\sqrt{2}-2+\sqrt{2}\right)\end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm cần tìm là $M_1\left(-1+\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right);M_2\left(-1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}\right)$

Bài 10. Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm đó đạt giá trị lớn nhất.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử điểm $M\left(x_0;\dfrac{2x_0}{x_0+1}\right)\in(C)$, phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là:

$$\Delta: y=\frac{2}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0}{x_0+1}\Leftrightarrow 2x-(x_0+1)^2y+2x_0^2=0$$

Khi đó khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến Δ là

$$d=\left|\frac{-2-2(x_0+1)^2+2x_0^2}{\sqrt{4+(x_0+1)^4}}\right|=\left|\frac{4(x_0+1)}{\sqrt{4+(x_0+1)^4}}\right|=\left|\frac{4}{\sqrt{\dfrac{4}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}\right|\leq 2$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x_0+1)^2=\dfrac{4}{(x_0+1)^2}\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{2}$

Vậy có hai điểm cần tìm là $M_1\left(-1+\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right);M_2\left(-1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}\right)$

Bài 11. Tìm hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$ sao cho khoảng cách giữa chúng đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

Giả sử điểm $A\left(-1-a,2+\dfrac{2}{a}\right);B\left(b-1,2-\dfrac{2}{b}\right)\in(C)$ với $a,b>0$

Khi đó ta có

$$AB^2=(a+b)^2+4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=(a+b)^2\left(1+\frac{4}{(ab)^2}\right)\geq 4ab\left(1+\frac{4}{(ab)^2}\right)\geq 8ab\sqrt{1.\frac{4}{(ab)^2}}=16$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a=b\\1=\dfrac{4}{(ab)^2}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\sqrt{2}\Rightarrow A\left(-1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}\right);B\left(\sqrt{2}-1;2-\sqrt{2}\right)$$

Vậy hai điểm cần tìm là $A\left(-1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}\right);B\left(\sqrt{2}-1;2-\sqrt{2}\right)$

Bài 12. Tìm hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$, biết rằng hai điểm đó tạo với điểm $A(2;0)$ một tam giác vuông cân tại A.

Lời giải:

Giả sử điểm $B\left(b,2+\dfrac{2}{b-1}\right);C\left(c,2+\dfrac{2}{c-1}\right)$ với $b<1<c$

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B,C trên trục hoành

Từ điều kiện $\begin{cases}AB\perp AC\\AB=AC\end{cases}\Rightarrow\triangle ABH=\triangle CAK$

Từ đó suy ra: $\begin{cases}AH=CK\\BH=AK\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-b=2+\dfrac{2}{c-1}\\\left|2+\dfrac{2}{b-1}\right|=|c-2|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-1\\c=3\end{cases}$

Vậy hai điểm cần tìm là $B(-1;1);C(3;3)$

Bài 13. Chứng minh rằng với mọi $m\neq 0$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+m}{x+m}$ luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Lời giải:

Giả sử đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng $d: y = kx + l$ với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m^2}{(x+m)^2} = k \\ \dfrac{(m+1)x+m}{x+m} = kx + l \end{cases}, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{m^2}{(x+m)^2} \\ m^2(l-x-1) + 2m(lx-x) + lx^2 - x^2 = 0 \end{cases}, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{m^2}{(x+m)^2} \\ l - x - 1 = 0 \\ lx - x = 0 \\ lx^2 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ l = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với đường thẳng $d: y = x + 1$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm m để đồ thị hàm số $y = -\dfrac{x^3}{m} + 3mx^2 - 2(C_m), m \neq 0$ nhận điểm $I(1;0)$ làm tâm đối xứng.

1.2. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 2(C)$. Tìm trên (C) hai điểm phân biệt đối xứng với nhau qua đường thẳng $2x - y + 2 = 0$.

1.3. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}(C)$. Tìm trên (C) những điểm có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

1.4. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-4}{x-2}(C)$. Tìm trên (C) các điểm cách đều hai đường tiệm cận của (C).

1.5. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-4}{x+1}$. Tìm trên đồ thị hàm số hai điểm đối xứng với nhau qua đường thẳng MN biết $M(-3;0), N(-1;-1)$.

1.6. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ (C). Tìm trên (C) điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) tại M và đường thẳng đi qua M và giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) có tích hệ số góc bằng -9.

1.7. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}(C)$. Tìm trên (C) các điểm có hoành độ là các số nguyên.

1.8. Tìm điểm cố định của $(C_m): y=x^3+(m+|m|)x^2-4x-4(m+|m|)$.

1.9. Với mỗi giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N và cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A, B. Chứng minh rằng $MA=NB$.

1.10. Tìm m để trên đồ thị hàm số $y=x^3-3(2m^2-1)x^2+3(m^2-1)x+1-m^3$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

1.11. Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ biết rằng tổng khoảng cách từ điểm đó đến đường thẳng $d: 2x+y-2=0$ đạt giá trị nhỏ nhất.

1.12. Tìm những điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ sao cho khoảng cách giữa chúng đạt giá trị nhỏ nhất.

1.13. Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ điểm đó đến trục hoành bằng hai lần khoảng cách từ điểm đó đến trục tung.

1.14. Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$ sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến các trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất.

1.15. Tìm hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$, biết rằng hai điểm đó tạo với điểm $A(2;0)$ một tam giác vuông cân tại A.

1.16. Tìm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$ hai điểm A, B có độ dài đoạn $AB=4$ và đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y-x=0$.

1.17. Tìm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x-1}{x+2}$ các điểm A, B biết rằng tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A, B song song với nhau và độ dài đoạn AB bằng $2\sqrt{2}$.

1.18. Tìm trên đồ thị $y=-x^3+3x$ bốn điểm A, B, C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình vuông tâm O.

VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Dạng 1: Dựa vào đồ thị hàm số (C): $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $(C_1): y = |f(x)|$.

Phương pháp:

Ta có $(C_1): y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) \leq 0 \end{cases}$

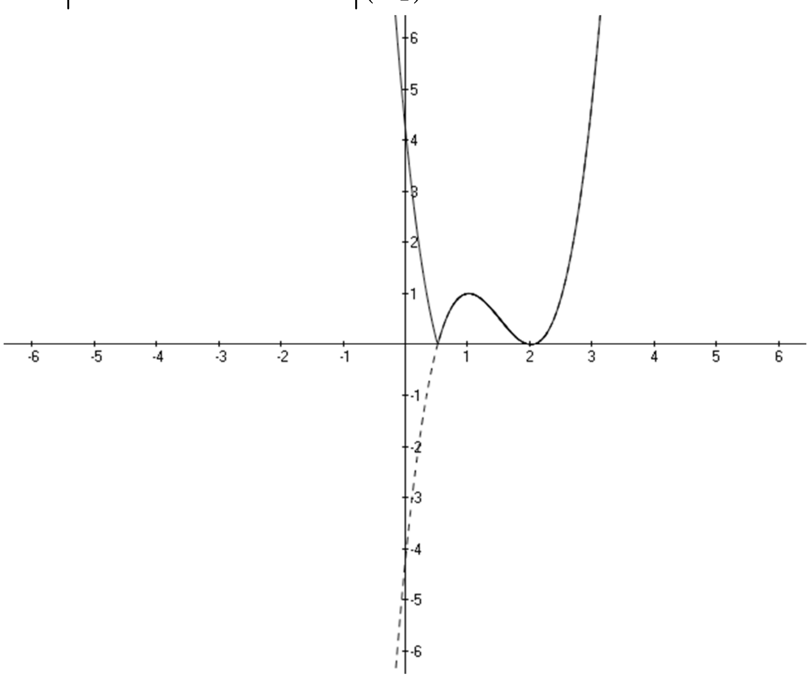
Do đó đồ thị (C_1) gồm hai phần

Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằ trên trục hoành.

Phần 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm phái dưới trục hoành qua trục hoành.

$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 (C)$

$y = |2x^3 - 9x^2 + 12x - 4| (C_1)$



(C_1)

Dạng 2: Dựa vào đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $(C_2): y = f(|x|)$.

Phương pháp:

Ta có $\left(C_2\right): y = f\left(|x|\right) = \begin{cases} f(x), x \geq 0 \\ f(-x), x \leq 0 \end{cases}$

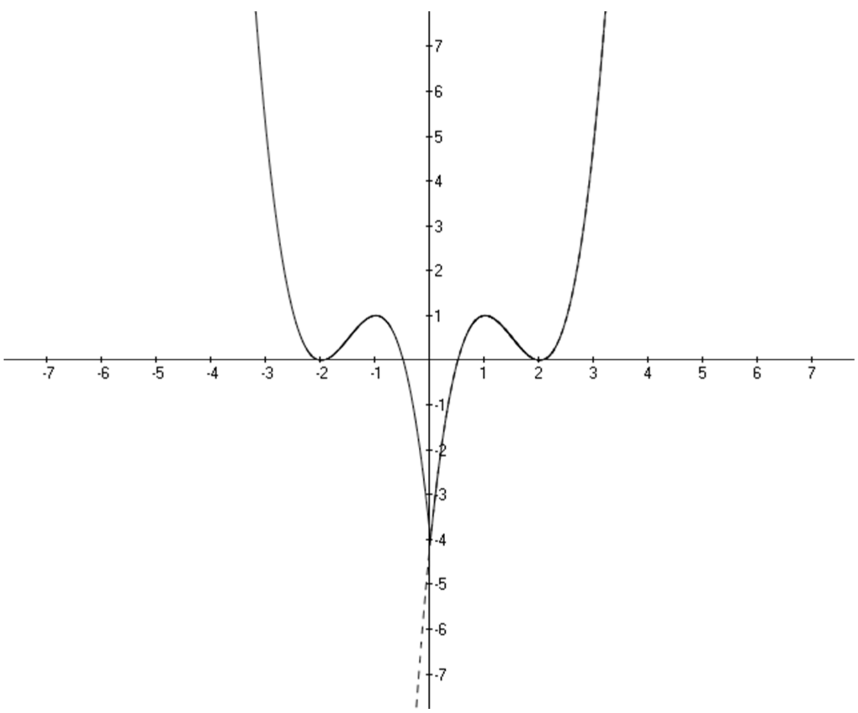
Do đó đồ thị $\left(C_2\right)$ gồm hai phần

Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị $\left(C\right)$ bên phải trục tung.

Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục tung.

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4\left(C\right)$$

$$y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4\left(C_1\right)$$



$\left(C_1\right)$

Dạng 3: Dựa vào đồ thị hàm số $\left(C\right): y = f\left(x\right)$ suy ra đồ thị hàm số $\left(C_3\right): |y| = f\left(x\right)$.

Phương pháp:

Đồ thị hàm số $|y| = f(x)$ đối xứng qua trục hoành.

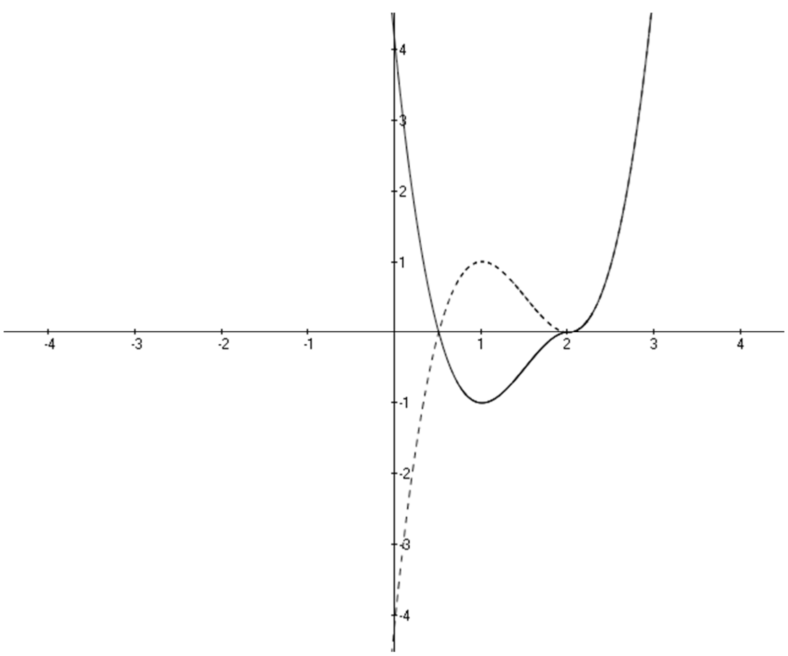
Ta có $\left(C_3\right): |y| = f\left(x\right) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} y, y \geq 0 \\ -y, y \leq 0 \end{cases}$

Do đó đồ thị nhận trục hoành làm trục đối xứng, nên đồ thị gồm hai phần

Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) phía trên trục hoành
Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục hoành
Dạng 4: Dựa vào đồ thị hàm số $(C): y = f(x) = u(x).v(x)$ suy ra đồ thị hàm số $(C_4): y = |u(x)|v(x)$.
Phương pháp:
Ta có $(C_4): y = |u(x)|v(x) = \begin{cases} u(x)v(x) = f(x), u(x) \geq 0 \\ -u(x)v(x) = -f(x), u(x) \leq 0 \end{cases}$.
Do đó đồ thị (C_4) gồm hai phần
Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên miền $u(x) \geq 0$.
Phần 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (C) qua trục hoành nằm trên miền $u(x) \leq 0$.

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 (C)$$

$y = |x-2|\left(2x^2 - 5x + 2\right)(C_1)$



(C_1)

Trên đây là 4 dạng bài hay gặp trong kỳ thi TSĐH, một số dạng khác phức tạp hơn như sau
Dạng 5: Dựa vào đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $(C_5): y = |f(|x|)|$.

Dạng 6: Dựa vào đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $(C_6): |y| = f(|x|)$.

Dạng 7: Dựa vào đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $(C_7): |y| = |f(|x|)|$.

Dạng toán: Biện luận số nghiệm của phương trình dựa vào đồ thị

Phương pháp:

Dùng trực quan đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$, trong đó m là tham số. Coi $y = g(m)$ là đường thẳng và $y = f(x)$ là đường cong

Ta phải vẽ được đồ thị hàm số $y = f(x)$, khi đó số giao điểm của đường thẳng $y = g(m)$ và đường cong $y = f(x)$ chính là số nghiệm của phương trình.

Như vậy điểm mấu chốt của bài toán là vẽ được đồ thị hàm số $y = f(x)$.

BÀI TẬP MẪU

Lưu ý:

Tài liệu này quan niệm:

- Đồ thị hàm số lúc đầu quan niệm là đồ thị hàm số cơ bản.
- Đồ thị hàm số được suy ra từ đồ thị hàm số cơ bản gọi là đồ thị hàm số mới.

Với các bài toán mẫu ở đây, ta giả sử là đã có đồ thị hàm số cơ bản và ở đây chỉ nên ra cách suy ra ra đồ thị hàm số mới. Khi làm bài các em phải xuất phát từ đồ thị hàm số cơ bản xong mới được suy ra đồ thị hàm số mới(thường thì đề ra câu 1, ý một khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số các em đã có đồ thị hàm sô cơ bản).

Bài 1. Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$.

Lời giải:

Hàm số cơ bản $y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ (C)

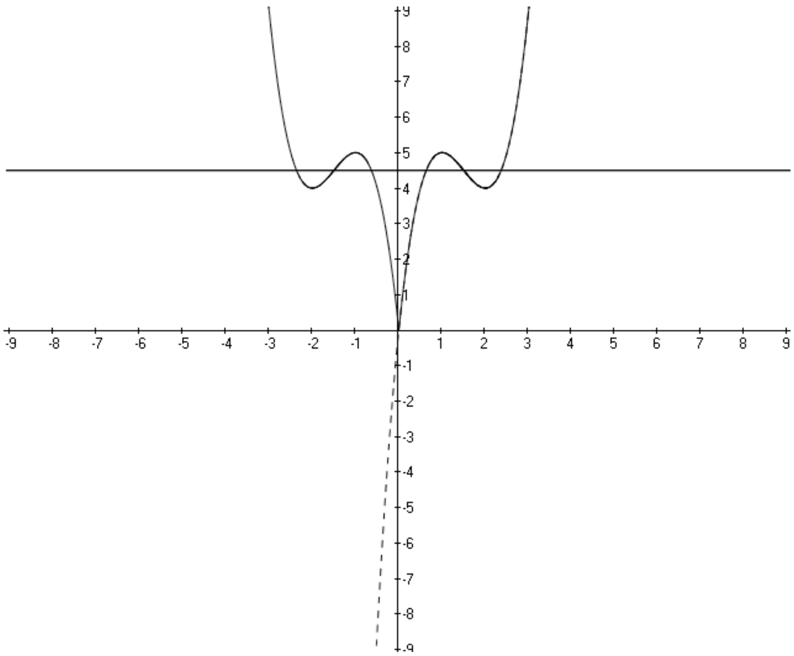
Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ (C_1)

Ta có $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = \begin{cases} f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x, x \ge 0 \\ f(-x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x, x < 0 \end{cases}$

Do đó đồ thị (C_1) gồm hai phần:

Phần 1: giữ nguyên phần đồ thị (C) bên phải trục tung.

Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục tung.



Đồ thị hàm số (C_1) là phần liền nét trên hình vẽ

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra để phương trình có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt (C_1) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow 4 < m < 5$.

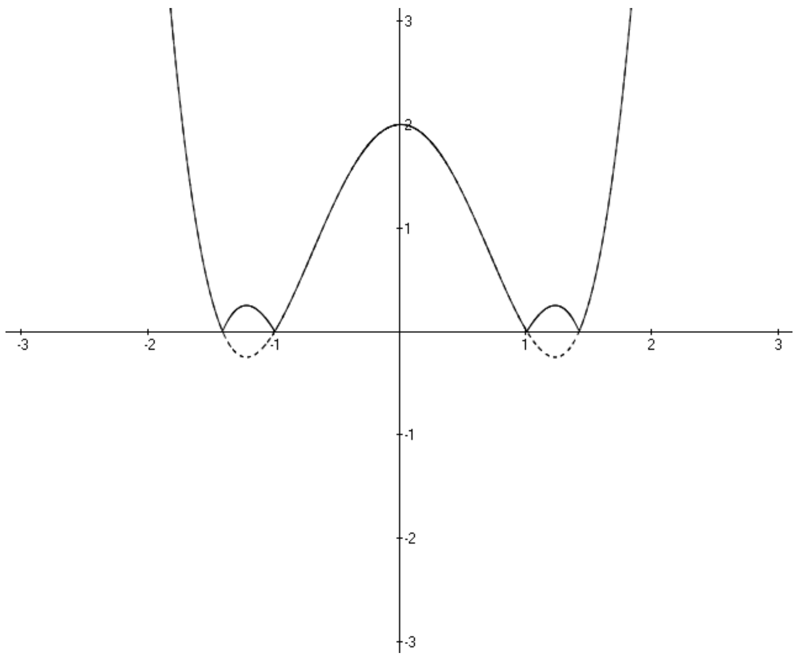
Bài 2. Tìm m để phương trình $2^{|x^4-3x^2+2|} = m-1$ có tám nghiệm phân biệt.

Lời giải:

Điều kiện: $m > 1$, khi đó phương trình tương đương với:

$|x^4 - 3x^2 + 2| = \log_2(m-1)$

Đồ thị hàm số $y = |x^4 - 3x^2 + 2|$ như trên hình vẽ



Dựa vào đồ thị hàm số suy ra để phương trình có tám nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = k = \log_2(m-1)$ cắt đồ thị hàm số tại tám điểm phân biệt

$\Leftrightarrow 0 < \log_2(m-1) < \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2 < m < 1 + \sqrt[4]{2}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4\,(C)$

- **a.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).
- **b.** Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$.

Bài 2. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2\,(C)$.

- **a.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
- **b.** Với giá trị nào của m, phương trình $x^2\left|x^2 - 2\right| = m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt.

Bài 3. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(2;0)$ với hệ số góc k. Tìm k để d cắt đồ thị hàm số $y = \left|x^3\right| - 3|x| - 2$ tại 4 điểm phân biệt.

Bài 4. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 - x + 1\,(C)$.

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C)

b. Tìm những giá trị của tham số m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt $|x-1|^3 - x^2 - 2x - |x-1| = m$.

Bài 5. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}(C)$.

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b. Tìm m để phương trình sau có nghiều nghiệm nhất $\dfrac{2|x|+1}{|x|+1} = m$.

MỘT SỐ BÀI TẬP TỔNG HỢP

1.1. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8\ (C_m)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

2. Tìm m để (C_m) tiếp xúc với trục hoành.

3. Chứng minh rằng tồn tại điểm x_0 sao cho tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm đó song song với nhau với mọi m.

4. Chứng minh rằng trên parabol $(P): y = x^2$ có hai điểm không thuộc đồ thị hàm số với mọi m.

1.2. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+2}{x-1}(C_m)$, m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m = 3$.

2. Cho hai điểm $A(-3;4)$ và $B(3;-2)$. Tìm m để trên đồ thị (C_m) có hai điểm P, Q cách đều hai điểm A, B và diện tích tứ giác $APBQ$ bằng 24.

1.3. Cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m+1)x + 3 - m(C_m)$, m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 2$.

2. Tìm m để hàm số (C_m) có cực đại, cực tiểu và khoảng cách từ điểm $N\left(\dfrac{1}{2};4\right)$ đến đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của hàm số là lớn nhất.

1.4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2\ (C)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

2. Tìm tất cả các giá trị của k để trên đồ thị hàm số (C) tồn tại đúng hai tiếp tuyến có cùng hệ số góc k đồng thời đường thẳng đi qua hai tiếp điểm cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $AB \geq \sqrt{5}$.

1.5. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ $\left(m\neq \pm 1\right)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m=-\dfrac{1}{2}$.

2. Lấy A,B lần lượt thuộc đồ thị hàm số có hoành độ $x_A=-1; x_B=1$. Xác định m biết tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A,B cắt nhau tại C sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

1.6. Cho hàm số $y=x^3-3\left(m+1\right)x^2+6mx-3m+4$ $\left(C_m\right)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m=1$.

2. Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $\left(C_m\right)$ tại điểm có hoành độ bằng 1. Tìm m để tiếp tuyến cắt đồ thị hàm số $\left(C_m\right)$ tại điểm B khác A, sao cho tam giác OAB cân tại O.

1.7. Cho hàm số $y=-x^3+\left(2m+1\right)x^2-m-1$ $\left(C_m\right)$

1. Với $m=1$, khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

2. Tìm m để đường thẳng $y=2mx-m-1$ cắt đồ thị $\left(C_m\right)$ tại 3 điểm phân biệt A,B,C sao cho $OA^2+OB^2+OC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

1.8. Cho hàm số $y=x^4+2\left(2m+1\right)x^2-3m$ $\left(C_m\right)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m=\dfrac{3}{2}$.

2. Tìm m để $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại 4 điểm tạo thành 3 đoạn thẳng bằng nhau.

1.9. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-4$ $\left(C\right)$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

2. Cho hai điểm $M\left(\dfrac{1}{2};2\right); N\left(\dfrac{7}{2};2\right)$. Viết phương trình đường thẳng d cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt P,Q sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

1.10. Cho hàm số $y=\dfrac{m-x}{x+2}$ $\left(C_m\right)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m=1$.

2. Tìm m để đường thẳng $d:2x+2y-1=0$ cắt $\left(C_m\right)$ tại hai điểm phân biệt và cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng $\dfrac{3}{8}$.

1.11. Cho hàm số $y=-\dfrac{2}{3}x^3+\left(m-1\right)x^2+\left(3m-2\right)x-\dfrac{5}{3}$ $\left(C_m\right)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m=2$.

2. Tìm trên đồ thị $\left(C_m\right)$ hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2>0$ sao cho tiếp tuyến tại mỗi điểm đó vuông góc với đường thẳng $x-3y+1=0$.

1.12. Với $m\in\left(0;4\right]$ tìm điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(m+1\right)x+m}{x+m}$ có hoành độ dương ; tung độ lớn nhất, biết rằng khoảng cách từ điểm đó đến tiếp tuyến cố định của đồ thị hàm số bằng $\sqrt{2}$.