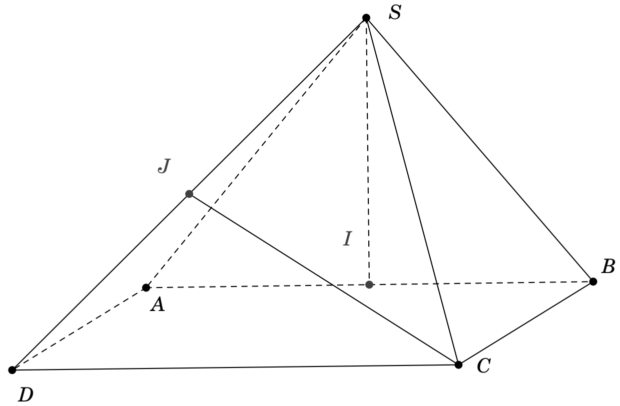
CÁC BÀI TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN CHO THI ĐẠI HỌC

1 - Khối chóp

Bài 1.1. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và $\widehat{SAD} = 90^0$. J là trung điểm SD. Tính theo a thể tích khối tứ diện $ACDJ$ và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ACJ).*

<u>Giải:</u>



$+\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

+ Gọi I là trung điểm AB thì $AD \perp SI\,(1)$. Mà ΔSAB đều nên $SI \perp AB\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $SI \perp (ABCD)$. Do đó $d(J,(ACD)) = \dfrac{1}{2}d(S,(ABCD)) = \dfrac{1}{2}SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Từ đó suy ra $V_{ACDJ} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.a^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

ΔBCI vuông tại B nên $CI^2 = CB^2 + BI^2 = \dfrac{5a^2}{4}$

ΔSIC vuông tại I nên $SC^2 = SI^2 + IC^2 = 2a^2$

Tương tự $SD^2 = SC^2 = 2a^2$

ΔSCD có CJ là đường trung tuyến nên $CJ^2 = \dfrac{SC^2 + CD^2}{2} - \dfrac{SD^4}{4} = a^2$

Xét ΔJAC có $JA = \dfrac{a}{\sqrt{2}}; AC = a\sqrt{2}; CJ = a$ nên tính được $cosA = \dfrac{3}{4}$

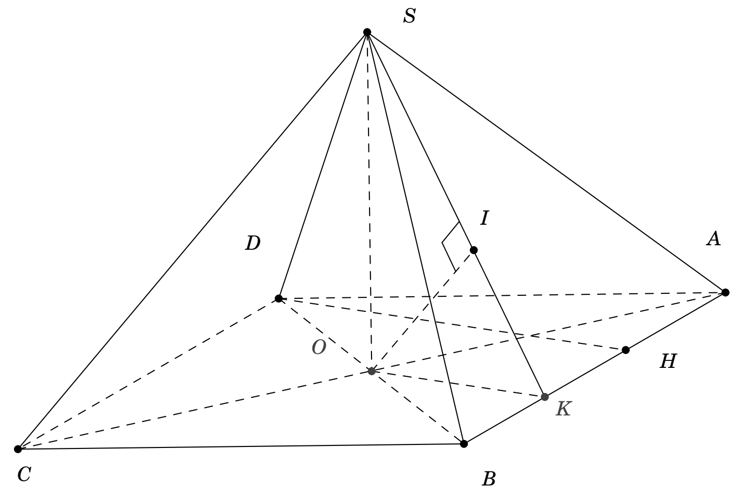
Từ đó $sin\widehat{JAC} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ nên $dt(JAC) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{7}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{8}$

Vậy $d(D,(JAC)) = \dfrac{3.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}}{\dfrac{a^2\sqrt{7}}{8}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$ □

Nhận xét: Có thể tính diện tích tam giác JAC bằng cách lấy hình chiếu của J trên mặt đáy (là trung điểm H của DI). Trong mặt đáy, kẻ HK vuông góc với AC (hay HK song song với BD) với K thuộc AC thì chỉ ra được JK vuông góc với AC và tính được JK là đường cao tam giác JAC.

Bài 1.2. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi ; hai đường chéo $AC = 2\sqrt{3}a, BD =$ 2a và cắt nhau tại O; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.*

Giải:



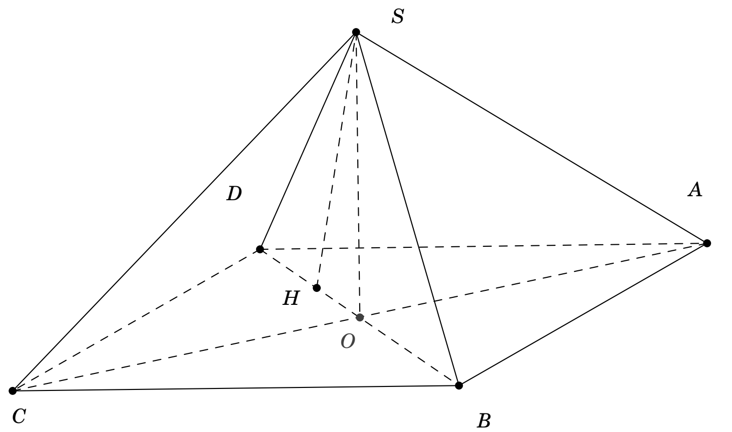
Từ giả thiết $AC = 2a\sqrt{3}; BD = 2a$ và AC, BD vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường chéo. Ta có tam giác ABO vuông tại O và $AO = a\sqrt{3}; BO = a$, do đó $\widehat{ABD} = 60^o$ hay tam giác ABD đều. Từ giả thiết hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên giao tuyến của chúng là $SO \perp (ABCD)$.

Do tam giác ABD đều nên với H là trung điểm của AB, K là trung điểm của HB ta có $DH \perp AB$ và $DH = a\sqrt{3}; OK // DH$ và $OK = \dfrac{1}{2}DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOK)$ Gọi I là hình chiếu của O lên SK ta có $OI \perp SK; AB \perp OI \Rightarrow OI \perp (SAB)$, hay OI là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB). Tam giác SOK vuông tại O, OI là đường cao $\Rightarrow \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \dfrac{a}{2}$ Diện tích đáy $S_{ABCD} = 4S_{\Delta ABO} = 2.OA.OB = 2\sqrt{3}a^2$; đường cao của hình chóp $SO = \dfrac{a}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD : V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$ □

Bài 1.3. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng* $3cm$ *, các cạnh* $SA = SB = SC = 3cm$*. Tam giác SBD có diện tích bằng* $6cm^2$ *.Tính thể tích của khối chóp S.ABCD.*

Giải:



Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$ suy ra H nằm trên BD (Vì $SA = SB == SC, BD$ là trung trực của AC). Do đó SH đường cao của hình chóp cũng là đường cao của tam giác SBD; Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì $SA = SC = DA = DC$ nên $SO = DO$ suy ra tam giác SBD là tam giác vuông tại S. Vì $dt(SBD) = 6$ và $SB = 3$ nên $SD = 4$; suy ra $BD = 5, SH = \dfrac{12}{5}$.

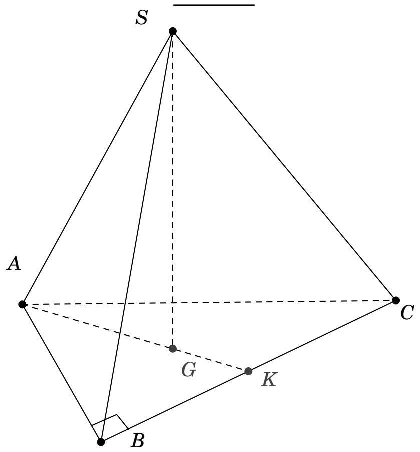
$ABCD$ là hình thoi có $AD = 3, DO = \dfrac{5}{2}$ nên $AO = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$ suy ra $dt(ABCD) = \dfrac{5\sqrt{11}}{2}$.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.dt(ABCD) = 2\sqrt{11}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $2\sqrt{11}(cm^3)$. □

Bài 1.4. *Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ (với $a > 0$); SA tạo với đáy (ABC) một góc bằng 60^0. Tam giác ABC vuông tại $B, \widehat{ACB} = 30^0$. G là trọng tâm tam giác ABC. Hai mặt phẳng (SGB) và (SGC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính thể tích hình chóp $S.ABC$ theo a.*

Giải:



Gọi K là trung điểm BC. Ta có $SG \perp (ABC); \widehat{SAG} = 60^0, AG = \dfrac{3a}{2}$.

Từ đó $AK = \dfrac{9a}{4}; SG = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$.

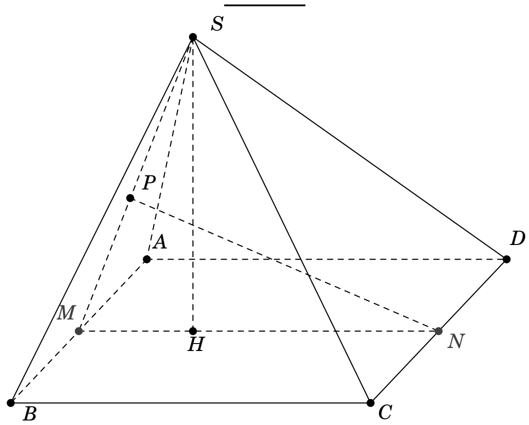
Trong tam giác ABC đặt $AB = x \Rightarrow AC = 2x; BC = x\sqrt{3}$.

Ta có $AK^2 = AB^2 + BK^2$ nên $x = \dfrac{9a\sqrt{7}}{14}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SG.dt(ABC) = \dfrac{243}{112}a^3$. □

Bài 1.5. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và tam giác SAB là tam giác cân tại đỉnh S. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng 45^0, góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$, biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SA bằng $a\sqrt{6}$.*

Giải:



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy, M là trung điểm AB và do tam giác SAB cân tại S nên SM vuông góc với AB và kết hợp với SH vuông góc với đáy suy ra AB vuông góc với mặt phẳng SMN nên theo giả thiết ta được: $(\widehat{SA,(ABCD)}) = \widehat{SAH} = 45^0 \Rightarrow SA = SH\sqrt{2}$.

$(\widehat{(SAB),(ABCD)}) = (\widehat{SM,MH}) = \widehat{SMH} = 60^0 \Rightarrow SM = SH.\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

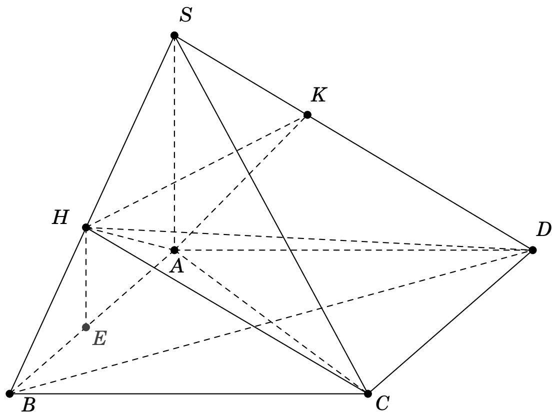
Từ điểm N kẻ NP vuông góc với SM thì dễ thấy NP là khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD suy ra $NP = a\sqrt{6}$. Ta có $SH.MN = NP.SM \iff SH.AB = a\sqrt{6}.SH \iff AB = 2\sqrt{2}a$

Trong tam giác SAM ta có $SA^2 = AM^2 + SM^2 \iff 2.SH^2 = \dfrac{4SH^2}{3} + 2a^2 \iff SH = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.dt(ABCD) = \dfrac{a\sqrt{3}.8a^2}{3} = \dfrac{8\sqrt{3}a^3}{3}$. □

Bài 1.6. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Tính thể tích khối chóp $H.ACD$ theo a và côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).*

Giải:



Kẻ $HE // SA (E \in AB) \Rightarrow HE \perp (ABCD)$.

Trong tam giác SAB có $AB^2 = BH.SB \Rightarrow \dfrac{BH}{SB} = \dfrac{AB^2}{SB^2} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{HE}{SA} \Rightarrow HE = \dfrac{a}{2}$

Diện tích ΔACD là $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}AD.CD = a^2 \Rightarrow$ thể tích $H.ACD$ là $V_{H.ACD} = \frac{1}{3}HE.S_{\Delta ACD} = \frac{a^3}{6}$

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp HA$ mà $HA \perp SB$ nên $HA \perp (SBC)$ tương tự gọi K là hình chiếu của A trên SD thì $AK \perp (SCD)$ do vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa AH và AK.

trong tam giác vuông SAB có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, SA^2 = SH.SB \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

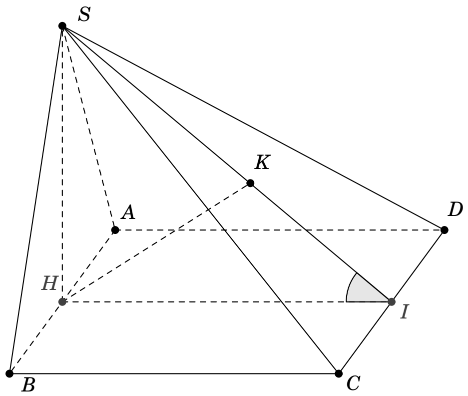
tương tự $AK = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}, SK = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$

$\cos\widehat{BSD} = \dfrac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2.SB.SD} = \dfrac{SH^2 + SK^2 - HK^2}{2.SH.SK} \Rightarrow HK^2 = \dfrac{a^2}{2}$

Trong ΔAHK có $cos\widehat{AHK} = \dfrac{AH^2 + AK^2 - HK^2}{2.AH.AK} = \dfrac{\sqrt{10}}{5} > 0 \Rightarrow cos(\widehat{(SBC),(SCD)}) = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$ □

Bài 1.7. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông . Mặt bên SAB là tam giác cân tại S, mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, mặt phẳng (SCD) tạo với đáy góc 60^0 và cách đường thẳng AB một khoảng là a. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.*

Giải:



Gọi H, I lần lượt là trung điểm AB và CD Do SAB cân tại S nên $SH \perp AB$ mà $(SAB) \perp (ABCD)$ do đó $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD, HI \perp CD$ nên $CD \perp (SHI)$, kẻ $HK \perp SI, CD \perp HK$ nên $HK \perp (SCD) \Rightarrow HK = d(H,(SCD)) = d(AB,(SCD)) = a$

$$CD \perp (SHI) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} HI \perp CD \\ SI \perp CD \\ CD = (SCD) \cap (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow (\widehat{(SCD),(ABCD)}) = (\widehat{HI,SI}) = \widehat{SIH} = 60^0$$

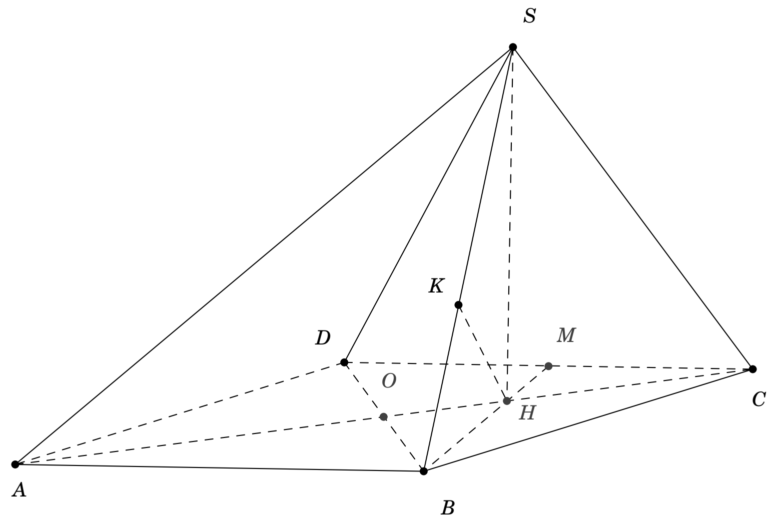
Trong ΔHKI có $HI = \dfrac{HK}{sin60^0} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} = BC$. Trong ΔHSI có $SH = HI.tan60^0 = 2a$

diện tích ABCD là $S_{ABCD} = BC^2 = \dfrac{4a^2}{3}$

Thể tích S.ABCD là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{8a^3}{9}$. □

Bài 1.8. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành thỏa mãn $AB = 2a, BC = a\sqrt{2}, BD = a\sqrt{6}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm của tam giác BCD. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD, biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng a.*

Giải:



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$, M là trung điểm CD và O là tâm của đáy $ABCD$. Do AO là trung tuyến của tam giác ABD nên $AO^2 = \dfrac{AB^2 + AD^2}{2} - \dfrac{BD^2}{4} = \dfrac{3a^2}{2} \Rightarrow$

$AO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AH = AO + \dfrac{AO}{3} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$

$BM^2 = \dfrac{BD^2 + BC^2}{2} - \dfrac{CD^2}{4} = \dfrac{6a^2 + 2a^2}{2} - \dfrac{4a^2}{4} = 3a^2 \Rightarrow BM = a\sqrt{3} \Rightarrow BH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Ta có $AH^2+BH^2=4a^2=AB^2 \Rightarrow AH \perp BH$, kết hợp với AH vuông góc với SH ta được $AH \perp (SHB)$. Kẻ HK vuông góc với SB, theo chứng minh trên ta được $AH \perp (SHB)$ suy ra $AH \perp HK \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của AC và SB suy ra $HK = a$.

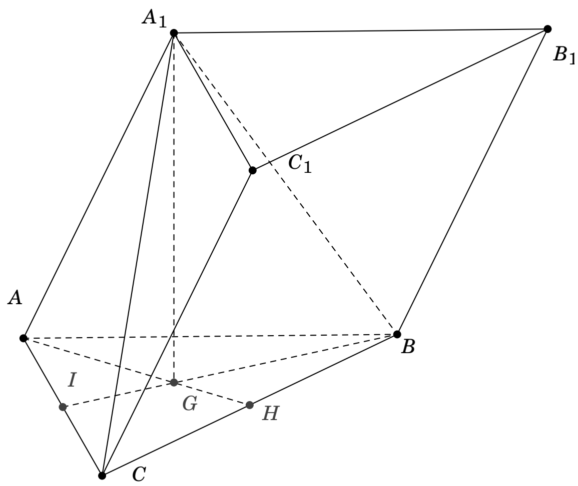
Trong tam giác vuông SHB ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HB^2} \Rightarrow SH = 2a$

Ta có $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.4.S_{OAB} = \dfrac{4}{3}SH.\dfrac{1}{2}OA.BH = \dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$ □

2 - Khối lăng trụ

Bài 2.1. *Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, điểm A_1 cách đều ba điểm A,B,C. Cạnh bên A_1A tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Hãy tìm α , biết thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ bằng $2\sqrt{3}a^3$.*

Giải:



Ta có tam giác ABC đều cạnh $2a$ nên $S_{ABC} = a^2\sqrt{3}$

Mặt khác $A_1A = A_1B = A_1C \Rightarrow A_1.ABC$ là hình chóp tam giác đều đỉnh A_1.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có A_1G là đường cao.

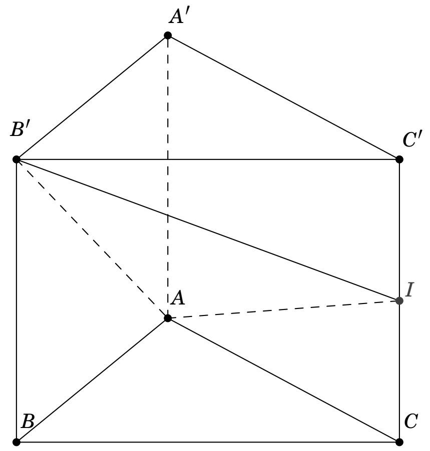
Trong tam giác ABC có $AG = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác vuông A_1AG có: $\widehat{A_1AG} = \alpha; A_1G = AG.tan\alpha = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.tan\alpha$.

Thể tích khối lăng trụ $V = A_1G.S_{ABC} = 2\sqrt{3}a^3 \Rightarrow tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^o$. □

Bài 2.2. *Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, góc $\widehat{BAC} = 120^0$, cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Chứng minh tam giác $AB'I$ vuông tại A và tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.*

Giải:



Ta có $BC = a\sqrt{3}$. Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông $ACI, ABB', B'C'I$

Suy ra $AI = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a, AB' = \sqrt{2}a, B'I = \dfrac{\sqrt{13}}{2}a$

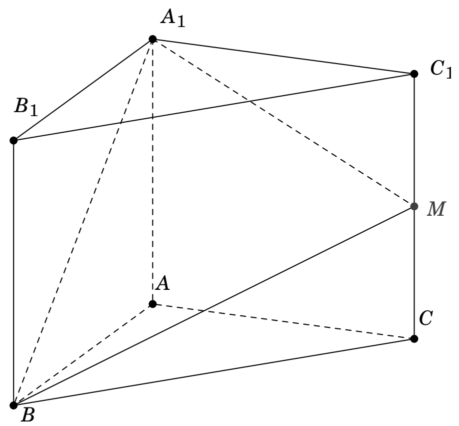
Do đó $AI^2 + AB'^2 = B'I^2$ Vậy tam giác $AB'I$ vuông tại A

$S_{AB'I} = \dfrac{1}{2}AI.AB' = \dfrac{\sqrt{10}}{4}a^2$, $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$. Tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác $AB'I$.

suy ra $S_{A'BI}\cos\alpha = S_{ABC} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{10}}{4}\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{10}}$ □

Bài 2.3. *(DB1 A 2007) Cho lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ có $AB = a, AC = 2a, AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1. Chứng minh $MB \perp MA_1$ và tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (A_1BM).*

Giải:



+ Ta có $A_1M^2 = A_1C_1^2 + C_1M^2 = 9a^2$, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^0 = 7a^2$;

$BM^2 = BC^2 + CM^2 = 12a^2$; $A_1B^2 = A_1A^2 + AB^2 = 21a^2 = A_1M^2 + MB^2$

$\Rightarrow MB$ vuông góc với MA_1

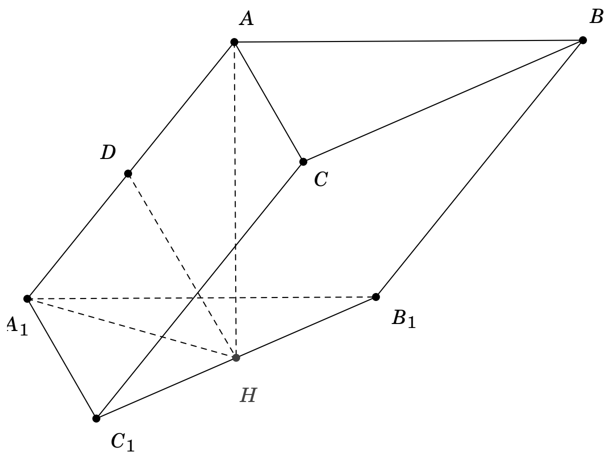
+ Hình chóp $MABA_1$ và $CABA_1$ có chung đáy là tam giác ABA_1 và đường cao bằng nhau nên thể tích bằng nhau.

$\Rightarrow V = V_{MABA_1} = V_{CABA_1} = \dfrac{1}{3}AA_1.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}a^3\sqrt{15}$

$\Rightarrow d(a,(MBA_1)) = \dfrac{3V}{S_{MBA_1}} = \dfrac{6V}{MB.MA_1} = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$ □

Bài 2.4. *Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a, góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0 . Hình chiếu vuông góc H của đỉnh A trên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ thuộc đường thẳng B_1C_1. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và B_1C_1 theo a.*

Giải:



$\widehat{AA_1H}=30^0$, $AH=AA_1.\sin 30^0=\dfrac{a}{2}$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$: $V=AH.dt(A_1B_1C_1)=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$

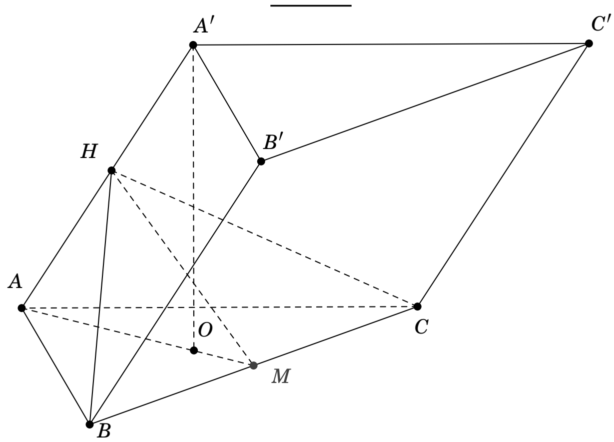
ΔAA_1H vuông, $A_1H=a.\cos 30^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do $\Delta A_1B_1C_1$ đều cạnh a,H thuộc B_1C_1 và $A_1H=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $A_1H\perp B_1C_1$

Có $AH\perp B_1C_1$ do đó $B_1C_1\perp(AA_1H)$. Kẻ đường cao HK của ΔAA_1H thì HK chính là khoảng cách giữa AA_1 và B_1C_1

Ta có $AA_1.HK=AH.A_1H$, $\Rightarrow HK=\dfrac{A_1H.AH}{AA_1}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. □

Bài 2.5. *Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm O của tam giác ABC. Một mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA', cắt lăng trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.*

Giải:



Gọi M là trung điểm của BC, gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên AA', Khi đó $(P)\equiv(BCH)$. Do góc $\widehat{A'AM}$ nhọn nên H nằm giữa AA'. Thiết diện của lăng trụ cắt bởi (P) là tam giác BCH.

Do tam giác ABC đều cạnh a nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AO = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Theo bài ra $S_{BCH} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2}HM.BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$,

$AH = \sqrt{AM^2 - HM^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{16}} = \dfrac{3a}{4}$

Do hai tam giác $A'AO$ và MAH đồng dạng nên $\dfrac{A'O}{AO} = \dfrac{HM}{AH}$

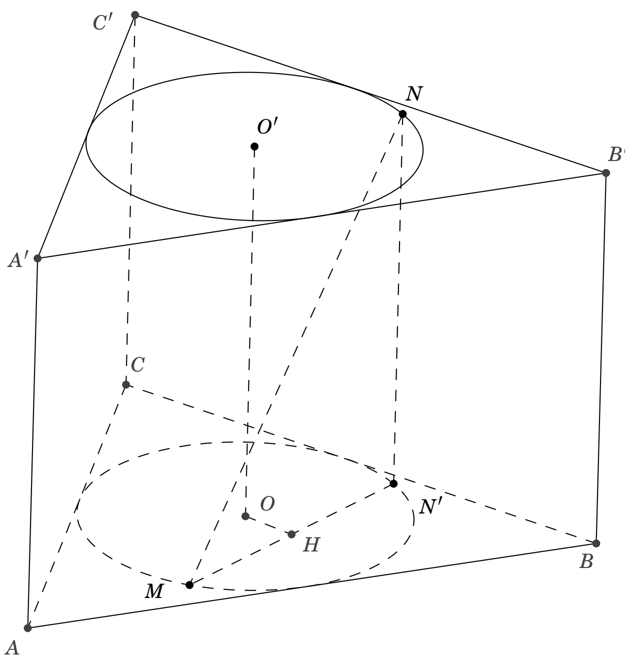
suy ra $A'O = \dfrac{AO.HM}{AH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\dfrac{4}{3a} = \dfrac{a}{3}$

Thể tích khối lăng trụ: $V = A'O.S_{ABC} = \dfrac{1}{2}A'O.AM.BC = \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. □

3 - Khối tròn xoay

Bài 3.1. *Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và đường cao bằng $a\sqrt{2}$.*
a) M và N là hai điểm lưu động trên hai đáy sao cho góc của MN và đáy bằng α . Tính khoảng cách từ trục đến MN.
b) Tính thể tích và diện tích xung quanh của lăng trụ tam giác đều ngoại tiếp hình trụ

Giải:



a) Kẻ đường sinh NN' ta có $\widehat{NMN'} = \alpha$, kẻ $OH \perp MN'$ thì OH bằng khoảng cách giữa trục OO' và MN.

Ta có: $MN' = NN'.cot\alpha = a.\sqrt{2}.\cot\alpha$

ΔOMH vuông : $OH^2 = OM^2 - MH^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{2}\cot^2\alpha = \dfrac{a^2}{2}(2 - \cot^2\alpha)$

$\Rightarrow OH = a\sqrt{\dfrac{2 - \cot^2\alpha}{2}}$

b) Gọi x là cạnh của tam giác đều ngoại tiếp đường tròn đáy của hình trụ.

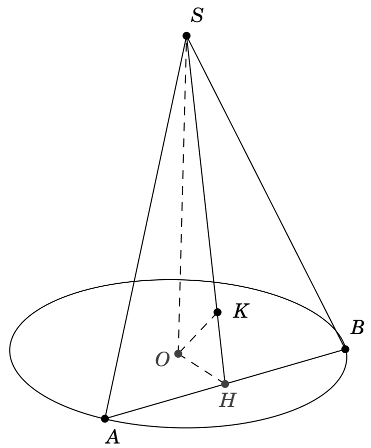
Ta có: $O'N = R = \dfrac{1}{3}AN = \dfrac{1}{3}\dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{6} \Rightarrow x = \dfrac{6R}{\sqrt{3}} = \dfrac{6a}{\sqrt{3}}$

$V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}.OO' = \dfrac{36a^2\sqrt{3}}{12}.a\sqrt{2} = 3a^2.\sqrt{6}$.

$S_{xq} = 3x.OO' = \dfrac{18a}{\sqrt{3}}.a\sqrt{2} = 6a^2\sqrt{6}.$ □

Bài 3.2. *Cho hình nón đỉnh S có đường sinh là a, góc giữa đường sinh và đáy là α .*
a) Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình nón.
b) Một mặt phẳng hợp với đáy một góc 60^0 và cắt hình nón theo hai đường sinh SA và SB. Tính diện tích tam giác SAB và khoảng cách từ tâm của đáy hình nón đến mặt phẳng này.

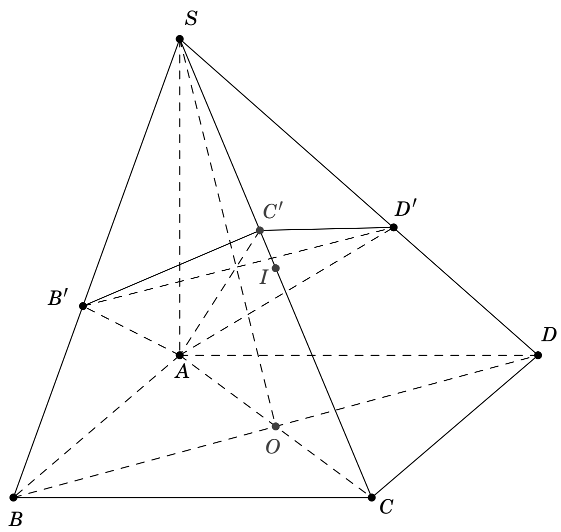
Giải:



a) Tính V và S_{xq}.
ΔSAO vuông : $SO = a.sin\alpha, AO = a.cos\alpha$
$V = \dfrac{1}{3}\pi.AO^2.SO = \dfrac{1}{3}\pi.a^3.\cos^2\alpha.\sin\alpha$
$Sxq = \pi.AO.SA = \pi.a^2.\cos\alpha$
b) + Tính S_{SAB}
Kẻ $OH \perp AB \Rightarrow SH \perp AB$, do đó $\widehat{SOH} = 60^0$
ΔSOH vuông :$OH = SO.cot.60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}.\sin\alpha}{3}$
AOH vuông : $AH^2 = AO^2 - OH^2 = a^2.cos^2\alpha - \dfrac{3a^2.\sin\alpha}{9}$
$\Rightarrow AH = \dfrac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$
Vậy $S_{SAB} = \dfrac{1}{2}AB.SH = \dfrac{2a^2.\sin\alpha\sqrt{3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}}{3}$
+ Tính $d(O,(SAB))$
Kẻ $OK \perp SH \Rightarrow OK \perp (SAB)$
OKH vuông : $OK = OH.sin60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}\sin\alpha}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a.\sin\alpha}{2}$ □

Bài 3.3. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật và có cạnh bên SA vuông góc với đáy.*
a) Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD.
b) Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC cắt AB,SC,SD lần lượt tại B',C',D'. Chứng tỏ rằng bảy điểm A,B,C,D,B',C',D' cùng nằm trên một mặt cầu.

Giải:



a) Ta có : $\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp SB$

Tương tự $CD \perp SD$

Vậy các điểm A, B, D đều nhìn đoạn SC dưới một góc vuông, do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là trung điểm I của SC.

b)Ta có : $AC' \perp SC$ tại C' $AB' \perp SC$ và $AB' \perp BC$ (vì $BC \perp (SAB)$) nên $AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp B'C$

Tương tự $AD' \perp D'C$

Vậy các điểm B', C', D', D, B cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông, do đó bảy điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng nằm trên mặt cầu đường kính AC. □

4 - Bài tập tự luyện có đáp số

1. (CĐ 2012) Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a\sqrt{2}, SA = SB = SC$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a.

   * Đáp số: $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}, R = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

2. (D 2012) Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính thể tích của khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

   * Đáp số: $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}, d = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

3. (B 2012) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA = 2a, AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH). Tính thể tích của khối chóp $S.ABH$ theo a.

   * Đáp số: $V = \dfrac{7\sqrt{11}a^3}{96}$

4. (A 2012)Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

   * Đáp số: $V = \dfrac{a^3\sqrt{7}}{12}, g = \dfrac{a\sqrt{42}}{8}$

5. (CĐ 2011) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, AB = a, SA$ vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30^0. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Tính thể tích của khối chóp $S.ABM$ theo a.
   * Đáp số: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$
6. (A 2011) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.
   * Đáp số: $V = a^3\sqrt{3}, d = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$
7. (B 2011) Cho hình lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.
   * Đáp số: $V = \dfrac{3a^3}{2}, d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
8. (D 2011) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a, BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.
   * Đáp số: $V = 2\sqrt{3}a^3, d = \dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$
9. (A 2010) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.
   * Đáp số: $V = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{24}, d = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$
10. (D 2010) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn $AC, AH = \dfrac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a.
    * Đáp số: $V = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{48}$
11. (CĐ 2010) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = SB$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.
    * Đáp số: $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$
12. (B 2010) Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a.
    * Đáp số: $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}, R = \dfrac{7a}{12}$

13. (CĐ 2009) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và CD. Chứng minh đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng SP. Tính theo a thể tích khối tứ diện $AMNP$.
   * Đáp số: $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{48}$
14. (A 2009) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a, CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (CSI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.
   * Đáp số: $V = \dfrac{3\sqrt{15}a^3}{5}$
15. (B 2009) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0; tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện $A'ABC$ theo a.
   * Đáp số: $V = \dfrac{9a^3}{208}$
16. (D 2009) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).
   * Đáp số: $V = \dfrac{4a^3}{9}, d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$
17. (CĐ 2008) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = 90^0, AB = BC = a, AD = 2a, SA$ vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Chứng minh rằng $BCNM$ là hình chữ nhật và tính thể tích của khối chóp $S.BCNM$ theo a.
   * Đáp số: $V = \dfrac{a^3}{3}$
18. (A 2008) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $AA', B'C'$.
   * Đáp số: $V = \dfrac{a^3}{2}, cos\varphi = \dfrac{1}{4}$
19. (B 2008) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a, SA = a, SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích khối chóp $S.BMDN$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.
   * Đáp số: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}, cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$
20. (D 2008) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối

lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM,B'C$.

* Đáp số: $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}, d=\dfrac{\sqrt{7}a}{7}$

21. (A 2007) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB,BC,CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện $CMNP$.

* Đáp số: $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{96}$

22. (B 2007) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA,M là trung điểm của AE,N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

* Đáp số: $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

23. (D 2007) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $\widehat{ABC}=\widehat{BAD}=90^0, BA=BC=a, AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

* Đáp số: $d=\dfrac{a}{3}$

24. (A 2006) Cho hình trụ có đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB=2a$. Tính thể tích của khối tứ diện $OO'AB$.

* Đáp số: $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$

25. (B 2006) cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}, SA=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và $SC; I$ là giao điểm của BM và AC. Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện $ANIB$.

* Đáp số: $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{36}$

26. (D 2006) Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a, SA=2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp $A.BCNM$.

* Đáp số: $V=\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{50}$

27. (B 2004) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $\varphi((0^0<\varphi<90^0)$. Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ theo φ. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a và φ.

* Đáp số: $tan\alpha=\sqrt{2}tan\varphi, V=\dfrac{\sqrt{2}a^3 tan\varphi}{6}$

28. (D 2003) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A,B với $AB=a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt

phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a.

* Đáp số: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

29. (B 2002) Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a. a) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D. b) Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh BB_1, CD, A_1D_1. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N.

 * Đáp số: $d = \dfrac{a}{\sqrt{6}}, g = 90^0$

30. (D 2002) Cho hình tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng $(ABC); AC = AD = 4cm; AB = 3cm; BC = 5cm$. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

 * Đáp số: $d = \dfrac{6\sqrt{34}}{17}$

31. (DB1 A 2007) Cho lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ có $AB = a, AC = 2a, AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1. Chứng minh $MB \perp MA_1$ và tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (A_1BM).

 * Đáp số: $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$

32. (DB2 A 2007) Cho hình chóp $S.ABC$ có góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0, hai tam giác ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

 * Đáp số: $d = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$

33. (DB1 B 2007) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy. Cho $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD. Chứng minh $SC \perp (AHK)$ và tính thể tích khối chóp $OAHK$.

 * Đáp số: $V = \dfrac{2a^3}{27}$

34. (DB2 B 2007) Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc nửa đường tròn đó sao cho $AC = R$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60^0. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Chứng minh tam giác AHK vuông và tính thể tích khối tứ diện $SABC$ theo R.

 * Đáp số: $V = \dfrac{R^3\sqrt{6}}{12}$

35. (DB1 D 2007) Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông $AB = AC = a, AA_1 = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA_1, BC_1. Chứng minh MN là đường vuông góc chung của các đường thẳng AA_1 và BC_1. Tính thể tích khối tứ diện MA_1BC_1.

 * Đáp số: $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

36. (DB2 D 2007) Cho lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh đều bằng a. M là trung điểm của AA_1. Chứng minh $BM \perp B_1C$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM

và B_1C.

* Đáp số: $d = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$

37. (DB1 A 2008) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, $BA = BC = 2a$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy (ABC) là trung điểm E của AB và $SE = 2a$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của $EC, SC; M$ là điểm di động trên tia đối của tia BA sao cho góc $\widehat{ECM} = \alpha(\alpha < 90^0)$ và H là hình chiếu vuông góc của S trên MC. Tính thể tích khối tứ diện $EHIJ$ theo a, α và tìm α để thể tích đó lớn nhất.

* Đáp số: $V = \dfrac{5a^3 sin2\alpha}{8}$

38. (DB2 A 2008) Cho hình chóp $S.ABC$ mà mỗi mặt bên là một tam giác vuông, $SA = SB = SC = a$. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, AC, BC; D$ là điểm đối xứng của S qua E; I là giao điểm của đường thẳng AD với mặt phẳng (SMN). Chứng minh $AD \perp SI$ và tính theo a thể tích của khối tứ diện $MBSI$.

* Đáp số: $V = \dfrac{a^3}{36}$

39. (DB1 B 2008) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích khối tứ diện $SACD$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SB và AC.

* Đáp số: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}, cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

40. (DB2 B 2008) Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và ABD là các tam giác đều cạnh a, các mặt ACD và BCD vuông góc với nhau. Hãy tính theo a thể tích khối tứ diện $ABCD$ và tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AD, BC.

* Đáp số: ĐS $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}, g = 60^0$

5 - Các bài toán về khoảng cách

Phạm vi những bài tập này tôi sẽ đề cập một phương pháp xuyên suốt để giải các bài toán về khoảng cách trong không gian đó là quy về bài toán cơ bản: Tính khoảng cách từ chân đường cao đến một mặt của hình chóp.

Trước hết ta cần nắm chắc bài toán: *Cho hình chóp SABC có SA vuông góc với đáy ABC. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng* (SBC)

• Việc tính khoảng cách này là rất đơn giản nhưng nó là chìa khóa để giải quyết mọi bài toán liên quan đến khoảng cách:

Ta kẻ $AM \perp BC, AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d_{A/(SBC)} = AH$

Trong tam giác vuông SAM ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{AS.AM}{\sqrt{AS^2 + AM^2}}$$

• Tính chất quan trọng

- Nếu đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (P) thì khoảng cách từ mọi điểm trên (d) đến mặt phẳng (P) là như nhau

- Nếu $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BM}$ thì $d_{A/(P)} = |k| d_{B/(P)}$ trong đó (P) là mặt phẳng đi qua M
- Nếu a, b là hai đường thẳng chéo nhau.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa b và $(P) \| a$ thì $d_{a/b} = d_{a/(P)} = d_{M\in a/(P)}$

Trên cơ sở các tính chất trên. Khi cần tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng , hay tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta luôn quy được về bài toán cơ bản.

Ta xét các bài toán sau:

Bài 5.1.
Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^o$, $BA = BC = a, AD = 2a$. *Cạnh bên SA vuông góc với đáy và* $SA = a\sqrt{2}$, *góc tạo bởi SC và (SAD) bằng* 30^o. *Gọi G là trọng tâm tam giác (SAB). Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SCD)*

Giải:

Kẻ CE vuông góc với AD thì E là trung điểm của AD và $CE \perp (SAD)$

$$\Rightarrow C\hat{S}E = 30^0 \Rightarrow SE = CE.\tan 60 = a\sqrt{3} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$$

Gọi M là trung điểm của AB, N là trung điểm của AE. Ta có BE song song với (SCD), MN cũng song song với (SCD). Ta có $ND = \frac{3}{4}AD$

$$GS = \frac{2}{3}MS \Rightarrow d_{G/(SCD)} = \frac{2}{3}d_{M/(SCD)} = \frac{2}{3}.d_{N/(SCD)} = \frac{2}{3}.\frac{3}{4}d_{A/(SCD)} = \frac{1}{2}d_{A/(SCD)}$$

Vì tam giác ACD vuông cân tại C nên CD vuông góc với (SAC).

Hạ AH vuông góc với SC thì $AH \perp (SCD) \Rightarrow d_{A/(SCD)} = AH = \frac{SA.SC}{\sqrt{SA^2 + SC^2}} = a$

(Ta cũng có thể lập luận tam giác SAC vuông cân suy ra $AH = a$) □

Bài 5.2.
Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$ *có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A cạnh huyền* $BC = a\sqrt{2}$ *cạnh bên* $AA' = 2a$, *biết* A' *cách đều các đỉnh A,B,C . Gọi M,N lần lượt là trung điểm của* AA', AC. *Tính thể tích khối chóp* $C'MNB$ *và khoảng cách từ* C' *đến mặt phẳng (MNB)*

Giải:

- Tính thể tích:

Vì A' cách đều A, B, C nên chân đường cao hạ từ A' lên mặt phẳng (ABC) là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi H là trung điểm của BC suy ra $A'H \perp (ABC)$

Gọi $K = MN \cap AC' \Rightarrow AK = \frac{1}{3}C'K \Rightarrow V_{C'MNB} = 3V_{AMNB}$

Gọi E là trung điểm của $AH \Rightarrow ME \perp (ABC) \Rightarrow V_{MANB} = \frac{1}{3}ME.dt(ANB)$

Tính được: $ME = \frac{1}{2}A'H = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{14}}{2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$

Suy ra: $V_{MANB} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{14}}{4}.\frac{a^2}{4} = \frac{\sqrt{14}a^3}{48}$. Vậy $V_{C'MNB} = \frac{\sqrt{14}a^3}{16}$

Ta thấy rằng việc tính trực tiếp khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (BMN) là tương đối khó. Để khắc phục khó khăn này ta sẽ tạo ra bài toán cơ bản tính khoảng cách từ chân đường cao đến mặt phẳng (BMN) bằng cách dựng đường cao ME của khối chóp $ABMN$.

- Tính khoảng cách: $d_{C'/(BMN)} = 3d_{A/(BMN)}$. Gọi F là trọng tâm tam giác ABC

Ta có: $AF = \frac{2}{3}AH; EH = \frac{1}{2}AH \Rightarrow EF + \frac{1}{3}AH = \frac{1}{2}AH \Rightarrow EF = \frac{1}{6}AH \Rightarrow d_{A/(BMN)} = 4d_{E/(BMN)}$

Như vậy $d_{C'/(BMN)} = 3d_{A/(BMN)} = 12d_{E/(BMN)}$

Hạ $\begin{cases} EP \perp BN \\ EQ \perp MP. \end{cases} \Rightarrow EQ \perp (MNB) \Rightarrow d_{E/(MNB)} = EQ = \dfrac{EP.EM}{\sqrt{EP^2+EM^2}}$

Ta có ΔEPF đồng dạng với $\Delta BHF \Rightarrow \dfrac{EP}{BH} = \dfrac{EF}{BF} \Rightarrow EP = \dfrac{BH.EF}{BF}$

Tính được $BH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $EF = \dfrac{1}{4}AF = \dfrac{1}{4}.\dfrac{2}{3}AH = \dfrac{1}{6}AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{12}$; $BF = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$

Suy ra: $EP = \dfrac{a\sqrt{5}}{20} \Rightarrow EQ = \dfrac{EP.EM}{\sqrt{EP^2+EM^2}} = \dfrac{\sqrt{994}a}{284}$

Vậy $d_{C'/(BMN)} = 12d_{E/(BMN)} = 12.\dfrac{\sqrt{994}a}{284} = \dfrac{3\sqrt{994}a}{71}$ □

Qua ví dụ trên ta thấy rõ tầm quan trọng của bài toán cơ bản

Bài 5.3.
Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Chân đường cao hạ từ S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc AB sao cho $\overrightarrow{HA} = -2\overrightarrow{HB}$. Góc tạo bởi SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp $SABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC theo a.

Giải:

- Tính thể tích:

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên HC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Góc tạo bởi SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SCH} = 60^o$.

Xét tam giác BHC theo định lý hàm số cosin ta có

$$HC^2 = HB^2 + BC^2 - 2HB.BC.\cos\widehat{HBC} = HB^2 + BC^2 - 2HB.BC.\cos 60^o = \frac{a^2}{9} + a^2 - 2.\frac{a}{3}.a.\frac{1}{2} = \frac{7a^2}{9}$$

Suy ra $\quad HC = \dfrac{a\sqrt{7}}{3} \Rightarrow SH = HC.\tan\widehat{SCH} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}.\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$

Ta suy ra $\quad V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{21}}{3}.\dfrac{1}{2}a.a.\sin 60^o = \dfrac{\sqrt{7}a^3}{12}$(ĐVTT)

- Tính khoảng cách:

Gọi E là trung điểm của BC , D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$

Ta có $AD//BC$ nên $d_{SA/BC} = d_{BC/(SAD)} = d_{B/(SAD)} = \dfrac{3}{2}d_{H/(SAD)}$

Kẻ $\quad \begin{cases} HF \perp AD \\ HK \perp SF \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAD) \Rightarrow d_{H/(SAD)} = HK$

Trong tam giác vuông SHF ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HF^2} + \dfrac{1}{HS^2} \Rightarrow HK = \dfrac{HF.HS}{\sqrt{HS^2+HF^2}}$

Mặt khác $HF = \dfrac{2}{3}AE = \dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}a}{3}$.

Suy ra $\quad HK = \dfrac{HF.HS}{\sqrt{HS^2+HF^2}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}a}{3}.\dfrac{a\sqrt{21}}{3}}{\sqrt{\dfrac{3}{9}a^2 + \dfrac{21}{9}a^2}} = \dfrac{\sqrt{42}}{12}a$

Vậy $d_{SA/BC} = \dfrac{3}{2}.\dfrac{\sqrt{42}}{12}a = \dfrac{\sqrt{42}}{8}a$ □

6 - Giải toán Hình không gian bằng Phương pháp tọa độ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

✪ Phương pháp

• Bước 1: Chọn hệ trục tọa $Oxyz$. Xác định một góc tam diện vuông trên cơ sở có sẵn của hình (như tam diện vuông, hình hộp chữ nhật, hình chóp tứ giác đều ...), hoặc dựa trên các mặt phẳng vuông góc dựng thêm đường phụ.

• Bước 2: Tọa độ hóa các điểm của hình không gian. Tính tọa độ điểm liên quan trực tiếp đến giả thiết và kết luận của bài toán. Cơ sở tính toán chủ yếu dựa vào quan hệ song song, vuông góc cùng các dữ liệu của bài toán.

• Bước 3: Chuyển giả thiết qua hình học giải tích. Lập các phương trình đường, mặt liên quan. Xác định tọa độ các điểm, véc tơ cần thiết cho kết luận.

• Bước 4: Giải quyết bài toán. Sử dụng các kiến thức hình học giải tích để giải quyết yêu cầu của bài toán hình không gian.

Chú ý các công thức về góc, khoảng cách, diện tích và thể tích ...

✪ Cách chọn hệ tọa độ một số hình không gian.

★ Tam diện vuông, hình hộp chữ nhật, hình lập phương.

• Xét tam diện vuông $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $S \equiv O$, $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ lần lượt cùng hướng với các tia Ox, Oy, Oz. Tọa độ các điểm khi đó là

$$S(0;0;0),\ A(a;0;0),\ B(0;b;0),\ C(0;0;c).$$

• Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh là $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ lần lượt cùng hướng với các tia Ox, Oy, Oz. Tọa độ các điểm khi đó là

$$A(0;0;0),\ B(a;0;0),\ D(0;b;0),\ A'(0;0;c),$$
$$C(a;b;0),\ B'(a;0;c),\ D'(0;b;c),\ C'(a;b;c).$$

★ Hình chóp tứ giác đều, tam giác đều.

• Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là giao của hai đường chéo và $SO = h$, $AC = 2a$, $BD = 2b$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với các tia Ox, Oy, Oz. Tọa độ các điểm khi đó là

$$O(0;0;0),\ S(0;0;h),\ A(a;0;0),\ B(0;b;0),\ C(-a;0;0),\ D(0;-b;0).$$

• Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có O là tâm của tam giác ABC và $SO = h$, $BC = a$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với các tia Ox, Oy, Oz. Tọa độ các điểm khi đó là

$$O(0;0;0),\ S(0;0;h),\ A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right),\ B\left(-\frac{a\sqrt{6}}{3};\frac{a}{2};0\right),\ C\left(-\frac{a\sqrt{6}}{3};-\frac{a}{2};0\right).$$

✪ Tùy vào từng bài toán mà có thể thay đổi linh hoạt cách chọn hệ tọa độ. Trong nhiều trường hợp, phải biết kết hợp kiến thức hình không gian tổng hợp và kiến thức hình giải tích nhằm thu gọn lời giải..

B. CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài 6.1.
Cho hình chóp $S.ABC$, trong đó SA vuông góc với mặt đáy ABC. Đáy là tam giác cân tại A, độ dài trung tuyên $AD = a$,; cạnh bên SB tạo với mặt đáy một góc α và tạo với mặt phẳng (SAD) góc β. Tìm thể tích hình chóp $S.ABC$.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Tọa độ các đỉnh

$$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;a),$$
$$C(a;a;0), D'(0;a;a), B'(a;0;a), C'(a;a;a).$$

a) Ta có

$$\overrightarrow{A'B}(a;0;-a), \overrightarrow{B'D}(-a;a;-a), \overrightarrow{A'B'}(a;0;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}\right] = (a^2; 2a^2; a^2)$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng là $d(A'B, B'D) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}\right].\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}\right]\right|} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

b) Tọa độ các điểm M, N, P là

$$M\left(a;0;\frac{a}{2}\right), N\left(\frac{a}{2};a;0\right), P\left(0;\frac{a}{2};a\right).$$

Do đó

$$\overrightarrow{MP}\left(-a;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{NC'}\left(\frac{a}{2};0;a\right) \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NC'} = 0.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng bằng 90^0.

c) Ta có

$$\overrightarrow{MP}\left(-a;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{MC'}\left(0;a;\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{MN}\left(-\frac{a}{2};a;-\frac{a}{2}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MC'}\right] = \left(-\frac{a^2}{4};\frac{a^2}{2};-a^2\right).$$

Thể tích khối tứ diện $C'MNP$ là $V_{C'MNP} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MC'}\right].\overrightarrow{MN}\right| = \dfrac{3}{16}a^3$. □

Bài 6.2. *(Đề thi tuyển sinh đại học, khối A năm 2007)*
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện $CMNP$.

Giải:

Vì tam giác SAD là tam giác đều và $(SAD)\perp(ABCD)$ nên gọi O là trung điểm của AD thì $SO\perp(ABCD)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (Oy song song với AB). Tọa độ các đỉnh

$$O(0;0;0), S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{4}\right), D\left(\frac{a}{2};0;0\right), A\left(-\frac{a}{2};0;0\right), C\left(\frac{a}{2};a;0\right), B\left(-\frac{a}{2};a;0\right).$$

Nên các trung điểm $P\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right), N(0;a;0), M\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{BP}\left(a;-\frac{a}{2};0\right)$ nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BP} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + 0 = 0$.

Vậy AM vuông góc với BP. Mặt khác

$$\overrightarrow{NM}\left(-\frac{a}{4};-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{NC}\left(\frac{a}{2};0;0\right), \overrightarrow{NP}\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NC}\right] = \left(0;\frac{a^2\sqrt{3}}{8};\frac{a^2}{4}\right).$$

Do đó thể tích khối tứ diện $CMNP$ là $V_{CMNP} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NC}\right].\overrightarrow{NP}\right| = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}$. □

Bài 6.3.
Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = AC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn AA' và BC'. Chứng minh MN là đường vuông góc chung của AA' và BC'. Tính thể tích khối tứ diện $MA'BC'$.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Tọa độ các điểm là

$$A(0;0;0),\ B(a;0;0),\ C(0;a;0)A'(0;0;a),\ B'(a;0;a),\ C'(0;a;a),\ M\left(0;0;\frac{a}{2}\right),\ N\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{MN}\left(\frac{a}{2};\ \frac{a}{2};\ 0\right)$ và $\overrightarrow{BC'}(a;\ -a;\ a\sqrt{2})$, $\overrightarrow{AA'}(0;\ 0;\ a\sqrt{2})$. Do đó $\begin{cases}\overrightarrow{BC'}.\overrightarrow{MN}=0\\ \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$,

hay MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AA' và BC'.

Mặt khác

$$\overrightarrow{MA'}\left(0;\ 0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right),\ \overrightarrow{MB}\left(0;\ a;\ -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right),\ \overrightarrow{MC'}\left(a;\ 0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

Do đó

$$\left[\overrightarrow{MA'},\overrightarrow{MB}\right]=\left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2};0;\ 0\right),$$

nên thể tích khối tứ diện $MA'BC'$ là $V_{MA'BC'}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MA'},\overrightarrow{MB}\right].\overrightarrow{MC'}\right|=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. □

Bài 6.4.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ có $AB = BC = CD = a$, $SA\perp(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Điểm M chia đoạn SB theo tỷ số -3, điểm I chia đoạn DS theo tỷ số $-\frac{4}{3}$. Mặt phẳng (AMI) cắt SC tại N.
a) Chứng minh N là trung điểm của SC.
b) Chứng minh $SD\perp(AMI)$ và $AMNI$ thuộc một đường tròn.
c) Tính khoảng cách từ trung điểm của AD đến mặt phẳng $(AMNI)$.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, gốc tọa độ là trung điểm của AD, trục Ox là trục đối xứng của hình thang $ABCD$, trục Oz song song với SA. Tọa độ các điểm là

$$A(0;\ -a;\ 0)B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ -\frac{a}{2};\ 0\right),D(0;\ a;\ 0),\ C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ 0\right),S\left(0;\ -a;\ a\sqrt{3}\right).$$

Vì $\overrightarrow{MS}=-3\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ID}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{IS}$ nên $M\left(\frac{3\sqrt{3}a}{8};-\frac{5a}{8};\frac{\sqrt{3}a}{4}\right)$, $I\left(0;-\frac{a}{7};\frac{4\sqrt{3}a}{7}\right)$.

a) Ta có $\overrightarrow{AM}\left(\frac{3\sqrt{3}a}{8};\frac{3a}{8};\frac{2\sqrt{3}a}{8}\right)$, $\overrightarrow{AI}\left(0;\ \frac{6a}{7};\ \frac{4\sqrt{3}a}{7}\right)$

Nên mặt phẳng (AMI) có phương trình $2y-\sqrt{3}z+2a=0$.

Trung điểm của SC là $N\left(\frac{\sqrt{3}a}{4};-\frac{a}{4};\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ thuộc mặt phẳng(AMI).

Vậy mặt phẳng (AMI) cắt SC tại trung điểm của SC.

b) Ta có $\overrightarrow{SD}(0;\ 2a;\ -a\sqrt{3})$, $\vec{n}_{(AMI)}(0;\ 2;\ -\sqrt{3})\Rightarrow\overrightarrow{SD}=a.\vec{n}_{(AMI)}$ nên $SD\perp(AMI)$.

Vì $\overrightarrow{IM}\left(\frac{3\sqrt{3}a}{8};-\frac{27a}{56};-\frac{9\sqrt{3}a}{28}\right)$ nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{IM}=0$, hay $\widehat{AMI}=90^o$. Tương tự $\widehat{ANI}=90^o$.

Vậy các điểm tứ giác $AMNI$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AI.

c) Khoảng cách cần tìm là $d(O,(AMI)) = \dfrac{|2a|}{\sqrt{0^2+2^2+(-\sqrt{3})^2}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}a$. □

Bài 6.5.
Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASC}=90^o$, $\widehat{CSB}=60^o$, $\widehat{BSA}=120^o$, $SA=SB=SC=a$.
a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).
b) Gọi M,N lần lượt chia đoạn SB, CS theo tỷ số -3. Tính khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng AN, CM.

Giải:

Ta có $CA=a\sqrt{2}$, $CB=a$, $AB=a\sqrt{3}$ nên tam giác ABC vuông tại C.
Mặt khác $SA=SB=SC$ nên hình chiếu của điểm S trên mặt đáy là trung điểm O của AB.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (hình vẽ), $Ox//BC$, $Oy//AC$.
Tọa độ các đỉnh của hình chóp là

$$S\left(0;\,0;\,\frac{a}{2}\right),\ A\left(\frac{a}{2};\,-\frac{a\sqrt{2}}{2};\,0\right),\ B\left(-\frac{a}{2};\,\frac{a\sqrt{2}}{2};\,0\right),\ C\left(\frac{a}{2};\,\frac{a\sqrt{2}}{2};\,0\right).$$

a) Ta có

$$\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(0;\,-\frac{a^2}{2};\,-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow \vec{n}_{(SBC)}=(0;\,1;\,\sqrt{2}),$$
$$\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right]=\left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2};\,\frac{a^2}{2};\,0\right)\Rightarrow \vec{n}_{(SAB)}=(\sqrt{2};\,1;\,0).$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).
Khi đó $\cos\varphi=\left|\cos(\vec{n}_{(SAB)},\vec{n}_{(SBC)})\right|=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\varphi=\arccos\dfrac{1}{3}$.
b) Vì $\overrightarrow{MS}=-3\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NC}=-3\overrightarrow{NS}$ nên tọa độ các điểm M,N là

$$M\left(-\frac{3a}{8};\,\frac{3a\sqrt{2}}{8};\,\frac{a}{8}\right),\ N\left(\frac{a}{8};\,\frac{a\sqrt{2}}{8};\,\frac{3a}{8}\right).$$

Ta có

$$\overrightarrow{AN}\left(-\frac{3a}{8};\,\frac{5a\sqrt{2}}{8};\,\frac{3a}{8}\right),\ \overrightarrow{CM}\left(-\frac{7a}{8};\,-\frac{a\sqrt{2}}{8};\,\frac{a}{8}\right),\ \overrightarrow{AC}\left(0;\,a\sqrt{2};\,0\right)$$
$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right]=\left(\frac{\sqrt{2}a^2}{8};\,-\frac{9a^2}{32};\,\frac{19\sqrt{2}.a^2}{32}\right).$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng $d(AN,CM)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right]\right|}=9\sqrt{\dfrac{2}{835}}$.

Góc giữa hai đường thẳng $\cos(\widehat{AN,CM})=\left|\cos(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM})\right|=\dfrac{7\sqrt{221}}{1768}\Rightarrow\varphi=\arccos\dfrac{7\sqrt{221}}{1768}$. □

Bài 6.6.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, $\widehat{BAD}=60^o$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO=\frac{3a}{4}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, BE.
a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).
b) Tính góc giữa hai đường thẳng AE và SF.
c) Mặt phẳng (α) chứa AD và vuông góc với (SBC) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện. Tính diện tích thiết diện đó.

Giải:

Vì OA, OB, OS đôi một vuông góc nên chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (hình vẽ). Tọa độ các điểm

$$A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right),D\left(0;-\frac{a}{2};0\right),C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right),B\left(0;\frac{a}{2};0\right),S\left(0;0;\frac{3a}{4}\right).$$

a) Ta có $\overrightarrow{SB}\left(0;\frac{a}{2};-\frac{3a}{4}\right)$, $\overrightarrow{SC}\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;-\frac{3a}{4}\right)$ nên $\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\left(-\sqrt{3};3;2\right)$

Phương trình mặt phẳng (SBC) là $(SBC):\ -2\sqrt{3}x+6y+4z-3a=0$.

Khoảng cách cần tìm $d(A,(SBC))=\dfrac{\left|-2\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}+6.0+4.0-3a\right|}{\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+6^2+4^2}}=\frac{3}{4}a$.

b) Vì E, F lần lượt là trung điểm của BC, BE nên $E\left(-\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{2};0\right)$, $F\left(-\frac{a\sqrt{3}}{8};\frac{a}{2};0\right)$.

Do đó $\overrightarrow{AE}\left(-\frac{3a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{2};0\right)$, $\overrightarrow{BF}\left(-\frac{a\sqrt{3}}{8};0;0\right)$, nên

$$\cos\left(\widehat{AE,BF}\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF}\right)\right|=\frac{3\sqrt{93}}{31}\Rightarrow\varphi=\arccos\frac{3\sqrt{93}}{31}.$$

c) Phương trình mặt phẳng (α) là $(\alpha):\ 2x-2\sqrt{3}y+4\sqrt{3}z-a\sqrt{3}=0$.
Phương trình các đường thẳng

$$SB:\begin{cases}x=0\\ y=2t\\ z=\frac{3a}{4}-3t\end{cases},\quad SC:\begin{cases}x=2t\\ y=0\\ z=\frac{3a}{4}+\sqrt{3}t\end{cases}.$$

Do đó $(\alpha)\cap SB=M\left(0;\frac{a}{4};\frac{3a}{8}\right)$, $(\alpha)\cap SC=N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{4};0;\frac{3a}{8}\right)$.

Thiết diện là hình thang $ADNM$ có chiều cao bằng khoảng cách từ A đến (SBC) nên diện tích của thiết diện là $S_{ADNM}=\frac{1}{2}(AD+MN).d(A,(SBC))=\frac{9a^2}{16}$. □

Bài 6.7.
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $BC=BS=a$, $BS\perp(ABC)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và BC.
a) Tính độ dài đoạn thẳng MN.
b) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB,MN.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (hình vẽ), với $O \equiv B$, trục Oz chứa BS, trục Oy chứa BC.
Tọa độ các điểm

$$B(0;0;0),\ C(0;a;0), S(0;0;a),\ A\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right), M\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a}{2}\right), N\left(0;\frac{a}{2};0\right).$$

a) Ta có $\overrightarrow{MN}\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{4};-\frac{a}{2}\right)$ Nên $MN=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.
b) Vì $\overrightarrow{BA}\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$ nên $\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{MN}\right]=\left(-\frac{a^2}{4};\frac{a^2}{4};\frac{a^2}{4}\right)$.
Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MN}=0$ nên $(\widehat{AB,MN})=90^0$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng là $d(AB,MN)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{MN}\right].\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{MN}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. □

Bài 6.8.
Cho hai đường thẳng Δ, Δ' chéo nhau và vuông góc với nhau nhận AB làm đường vuông góc chung ($A\in\Delta$, $A'\in\Delta'$). Gọi M,N là các điểm di chuyển trên Δ và Δ' sao cho $MN=AM+BN$.
a) Chứng minh rằng tích $AM.BN$ và thể tích khối tứ diện $ABMN$ là những đại lượng không đổi.
b) Chứng minh rằng MN luôn tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (hình vẽ), với $O\equiv A$, trục Oz chứa AB, trục Ox chứa đường thẳng a, trục $Oy//b$. Đặt $AB=h$, $AM=a$, và $AN=b$, $(h,a,b>0)$.
Tọa độ các điểm $A(0;0;0)$, $B(0;0;h)$, $M(a;0;0)$, $N(0;b;h)$.
Vì $MN=AM+BN$ nên $\sqrt{h^2+a^2+b^2}=a+b\Leftrightarrow 2a.b=h^2$.
a) Ta có
+) $AM.BN=a.b=\frac{h^2}{2}$.
+) $\overrightarrow{AB}(0;0;h)$, $\overrightarrow{AM}(a;0;0)$, $\overrightarrow{AN}(0;b;h)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]=(0;ah;0)$.
Thể tích khối tứ diện $ABMN$ là $V_{ABMN}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right].\overrightarrow{AN}\right|=\frac{1}{6}abh=\frac{1}{12}h^3$.
Vì $h=AB$ không đổi nên tích $AM.BN$ và thể tích khối tứ diện $ABMN$ là những đại lương không đổi.
b) Gọi trung điểm của AB là $I\left(0;0;\frac{h}{2}\right)$.
Ta có $\overrightarrow{MN}(-a;b;h)$, $\overrightarrow{IM}\left(a;0;\frac{h}{2}\right)$ nên $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{IM}\right]=\left(-\frac{hb}{2};\frac{ha}{2};-ab\right)$.
Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng MN là

$$d(I,MN)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{IM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}=\sqrt{\frac{h^2b^2+h^2a^2+4a^2b^2}{4(a^2+b^2+h^2)}}=\sqrt{\frac{2ab^3+2ba^3+4a^2b^2}{4(a^2+b^2+h^2)}}=\sqrt{\frac{ab}{2}}=\frac{h}{2}=\frac{AB}{2}.$$

Vậy đường thẳng MN tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB. □

Bài 6.9.

Trên các tia Ox, Oy, Oz của góc tam diện vuông $Oxyz$ lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = a, OB = a\sqrt{2}, OC = c, (a, c > 0)$. Gọi D là đỉnh đối diện với O của hình chữ nhật $AOBD$ và M là trung điểm của đoạn BC. Mặt phẳng (α) qua A, M cắt mặt phẳng (OCD) theo một đường thẳng vuông góc với đường thẳng AM.

a) Gọi E là giao điểm của (α) với đường thẳng OC. Tính độ dài đoạn thẳng OE.

b) Tính tỷ số thể tích của hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp $C.AOBD$ bởi mặt phẳng (α).

c) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (α).

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (hình vẽ). Tọa độ các điểm

$$O(0;\,0;\,0),\ A(a;\,0;\,0),\ B(0;\,a\sqrt{2};\,0),\ D(a;\,a\sqrt{2};\,0),\ C(0;\,0;\,c).$$

a) Vì M là trung điểm của BC nên $M\left(0;\,\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\,\dfrac{c}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{OC}(0;\,0;\,c)$, $\overrightarrow{OD}(a;\,a\sqrt{2};\,0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{OC};\,\overrightarrow{OD}\right] = (-ac\sqrt{2};\,ac;\,0)$.

Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (OCD) là $\vec{n}_{(OCD)}(-\sqrt{2};\,1;\,0)$.

Gọi $F = (\alpha) \cap CD$ thì EF là giao tuyến của (α) với (OCD), ta có $EF \perp AM$.

Vì $\overrightarrow{AM}\left(-a;\,\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\,\dfrac{c}{2}\right)$ nên $\left[\vec{n}_{(OCD)}, \overrightarrow{AM}\right] = \dfrac{c}{2}(1;\,\sqrt{2};\,0)$,

do đó một véc tơ chỉ phương của EF là $\vec{u}_{EF}(1;\,\sqrt{2};\,0)$.

Ta có $\left[\vec{u}_{EF}, \overrightarrow{AM}\right] = \dfrac{1}{2}(c\sqrt{2};\,-c;\,3\sqrt{2}a)$ nên phương trình mặt phẳng (α) là

$$\sqrt{2}cx - cy + 3\sqrt{2}az - ac\sqrt{2} = 0.$$

Do đó $(\alpha) \cap Oz = E\left(0;\,0;\,\dfrac{c}{3}\right) \Rightarrow OE = \dfrac{c}{3}$.

b) Ta có $(\alpha) \cap CD = F\left(\dfrac{2a}{3};\,\dfrac{2\sqrt{2}a}{3};\,\dfrac{c}{3}\right) \Rightarrow \dfrac{CF}{CD} = \dfrac{2}{3}$. Mà $V_{COADB} = 2V_{CAOD} = 2V_{CBOD}$ nên

$$\frac{V_{CEAFM}}{V_{COADB}} = \frac{V_{CAEF}}{2V_{CAOD}} + \frac{V_{CMEF}}{2V_{CBOD}} = \frac{1}{2}\left(\frac{CE}{CO}\cdot\frac{CF}{CD} + \frac{CM}{CB}\cdot\frac{CE}{CO}\cdot\frac{CF}{CD}\right) = \frac{1}{3}$$

Do đó tỷ số thể tích hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp $C.AODB$ bởi mặt phẳng (α) là $\dfrac{1}{2}$ (hay 2).

c) Khoảng cách cần tìm $d(C,\,(\alpha)) = \dfrac{\left|3\sqrt{2}ac - ac\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2c^2 + c^2 + 18a^2}} = \dfrac{2\sqrt{6}ac}{3\sqrt{c^2 + 6a^2}}$. □

Chú ý:

+) Nếu để ý $EF // OD$ thì việc tìm véc tơ chỉ phương của EF sẽ gọn hơn.

+) Hoàn toàn có thể tính tỷ số của câu b bằng phương pháp hình giải tích nhưng sẽ dài và phức tạp.

Bài 6.10.
Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ (AC là đường chéo), $ABEF$ (AE là đường chéo) không cùng nằm trong một mặt phẳng và thỏa mãn các điều kiện $AB = a$, $AD = AF = a\sqrt{2}$, đường thẳng AC vuông góc với đường thẳng BF. Gọi HK là đường vuông góc chung của AC, BF (H thuộc AC, K thuộc BF).
a) Gọi I là giao điểm của đường thẳng DF với mặt phẳng chứa AC và song song với BF. Tính tỷ số $\dfrac{DI}{DF}$.
b) Tính độ dài đoạn HK.
c) Tính bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABHK$.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (hình vẽ). Tọa độ các điểm

$$A \equiv O(0;\ 0;\ 0), B(0;\ 0;\ a), D(0;\ a\sqrt{2};\ 0),\ C(0;\ a\sqrt{2};\ a).$$

Gọi $F(x;\ y;\ 0)$, $x > 0$. Ta có $AF^2 = x^2 + y^2 = 2a^2$.
Mặt khác $AC \perp BF$ và $\overrightarrow{AC}(0;\ a\sqrt{2};\ a)$, $\overrightarrow{BF}(x;\ y;\ -a)$ nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BF} = 0 \Leftrightarrow y.a\sqrt{2} - a^2 = 0$
Do đó $y = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, hay $F\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2};\ \dfrac{a\sqrt{2}}{2};\ 0\right), E\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2};\ \dfrac{a\sqrt{2}}{2};\ a\right)$.
a) Mặt phẳng (α) chứa AC và song song với BF có phương trình $\sqrt{3}x - y + \sqrt{2}z = 0$.

Đường thẳng DF $\begin{cases} x = \sqrt{3}t \\ y = a\sqrt{2} - t \\ z = 0 \end{cases}$ Vì thế $DF \cap (\alpha) = I$ nên $I\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{4};\ \dfrac{3a\sqrt{2}}{4};\ 0\right)$.

Do đó $\dfrac{DI}{DF} = \dfrac{1}{2}$, hay I là trung điểm của DF.

b) Đường thẳng AC và BF có phương trình là $AC: \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{2}.t \\ z = t \end{cases}$, $BF: \begin{cases} x = \sqrt{3}.t \\ y = t \\ z = a - \sqrt{2}.t \end{cases}$.

Vì vậy $H(0;\ \sqrt{2}m;\ m)$, $K(\sqrt{3}n;\ n;\ a - \sqrt{2}n)$ nên $\overrightarrow{HK}(\sqrt{3}n;\ n - \sqrt{2}m;\ a - \sqrt{2}n - m)$

Mà HK là đường vuông góc chung nên $\begin{cases} \vec{u}_{AC}.\overrightarrow{HK} = 0 \\ \vec{u}_{BF}.\overrightarrow{HK} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}n - 2m + a - \sqrt{2}n - m = 0 \\ 3n + n - \sqrt{2}m - \sqrt{2}a + 2n + \sqrt{2}m = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta có $m = \dfrac{a}{3}$, $n = \dfrac{a\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \overrightarrow{HK}\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{6};\ -\dfrac{a\sqrt{2}}{6};\ \dfrac{a}{3}\right)$

Vậy độ dài đoạn HK là $HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
c) Ta có

$$\overrightarrow{AB}(0;0;a),\ \overrightarrow{AH}\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{3};\ \frac{a}{3}\right),\ \overrightarrow{AK}\left(\frac{a\sqrt{6}}{6};\ \frac{a\sqrt{2}}{6};\ \frac{2a}{3}\right),$$
$$\overrightarrow{HK}\left(\frac{a\sqrt{6}}{6};\ -\frac{a\sqrt{2}}{6};\ \frac{a}{3}\right),\ \overrightarrow{BH}\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{3};\ -\frac{2a}{3}\right).$$

Thể tích khối tứ diện $ABHK$ là $V_{ABHK} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}\right].\overrightarrow{AK}\right| = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
Diện tích các mặt $S_{AHK} = \dfrac{a^2}{6}$, $S_{BHK} = \dfrac{a^2}{6}$, $S_{ABH} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$, $S_{ABK} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{6} \Rightarrow S_{tp} = \dfrac{a^2(1+\sqrt{2})}{3}$.
Bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABHK$ là $r = \dfrac{3V_{ABHK}}{S_{tp}} = \dfrac{a(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6}$. □

Bài 6.11.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ và mặt cầu (S) nội tiếp trong hình lập phương đó. Mặt phẳng (P) quay quanh A, tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt hai cạnh $A'B'$ và $A'D'$ lần lượt tại M, N. Tìm tập hợp tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AA'MN$.

Giải:

Giả sử cạnh của hình lập phương là 1 đơn vị. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (hình vẽ).
Tọa độ các đỉnh $O \equiv A'$, $B'(1;\,0;\,0)$, $D'(0;\,1;\,0)$, $A(0;\,0;\,1)$.
Xét hai điểm bất kỳ M, N nằm trong các cạnh $A'B'$, $A'D'$ ta có $M(m;\,0;\,0)$, $N(0;\,n;\,0), 0 < m, n < 1$.
Phương trình mặt phẳng (AMN) là $(AMN): \dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} + z = 1$.
Mặt cầu nội tiếp hình lập phương có phương trình

$$(S): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Tứ diện $AA'MN$ có góc tam diện đỉnh A' vuông
nên tọa độ tâm mặt cầu ngoại tiếp $AA'MN$ là $I\left(\dfrac{m}{2}; \dfrac{n}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.
Mặt phẳng (AMN) tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi

$$d(I, (AMN)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\left|\dfrac{1}{2m} + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{m^2} + \dfrac{1}{n^2} + 1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + 1 \Leftrightarrow m + n = 1$$

Tức là $x_I + y_I = \dfrac{1}{2} = z_I \quad 0 < x_I,\, y_I < 1$
nên quỹ tích của điểm I là đoạn thẳng I_1I_2 trừ hai điểm $I_1\left(\dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{1}{2}\right)$; $I_2\left(0; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$
Các điểm I_1; I_2 đó chính là trung điểm các đoạn thẳng AB', AD'. □

Bài 6.12.
Tứ diện đều $ABCD$ có tâm là S và có độ dài các cạnh bằng 2. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là hình chiếu của các đỉnh A, B, C, D trên đường thẳng nào Δ đó đi qua S. Tìm tất cả các vị trí của đường thẳng Δ sao cho $SA'^4 + SB'^4 + SC'^4 + SD'^4$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$ bằng hình lập phương $AB_1CD_1.C_1DA_1B$.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (hình vẽ).
Tọa độ các điểm $A(\sqrt{2};\,0;\,0), B(0;\,\sqrt{2};\,0), C(0;\,0;\,\sqrt{2})$,
Và $D(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2})$, $S\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Suy ra $\overrightarrow{SA}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SB}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
$\overrightarrow{SC}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SD}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Gọi $\vec{e}(x;\,y;\,z)$ là véc tơ đơn vị của đường thẳng Δ. Khi đó

$$SA' = \left|\vec{e}.\overrightarrow{SA}\right|,\ SB' = \left|\vec{e}.\overrightarrow{SB}\right|,\ SC' = \left|\vec{e}.\overrightarrow{SC}\right|,\ SD' = \left|\vec{e}.\overrightarrow{SD}\right|$$

Vì $x^2+y^2+z^2=1$ nên

$$\begin{aligned}4T &= 4(SA'^4+SB'^4+SC'^4+SD'^4)\\ &= (-x+y+z)^4+(x-y+z)^4+(x+y-z)^4+(x+y+z)^4\\ &= 4+16(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\le 4+\frac{16}{3}(x^2+y^2+z^2)^2\end{aligned}$$

Hay $T\le\frac{7}{3}$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x^2=y^2=z^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow |x|=|y|=|z|=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của T là $\frac{7}{3}$ đạt được khi Δ là các đường thẳng đi qua các đỉnh của tứ diện đều $ABCD$. □

C. BÀI TẬP

Bài 6.13.

Cho hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$.

a) Chứng minh rằng $OH\perp(ABC)$, $H\in(ABC)$ khi và chỉ khi H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC).

c) Tính khoảng cách từ O đến tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC.

d) Cho M là một điểm bất kỳ trên mặt phẳng (ABC), không trùng với A,B,C,H (H trực tâm tam giác ABC). Chứng minh rằng $\frac{AM^2}{AO^2}+\frac{BM^2}{BO^2}+\frac{CM^2}{CO^2}=2+\frac{HM^2}{HO^2}$.

e) Gọi α, β,γ lần lượt là góc giữa các mặt bên với mặt đáy.

Chứng minh rằng $\frac{\sin^2\alpha}{1+\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\sin^2\beta}{1+\sin\gamma\sin\alpha}+\frac{\sin^2\gamma}{1+\sin\alpha\sin\beta}\ge\frac{6}{5}$.

Giải:

Kết luận: □

Bài 6.14.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=2a$, $AA'=a\sqrt{2}$, M là một điểm thuộc đoạn AD, K là trung điểm của $B'M$.

a) Đặt $AM=m$ $(0\le m\le 2a)$. Tính thể tích khối tứ diện $A'KID$ theo a và m, trong đó I là tâm của hình hộp. Tìm vị trí của điểm M để thể tích đó đạt giá trị lớn nhất.

b) Khi M là trung điểm AD. Tính diện tích thiết diện cắt hình hộp bởi mặt phẳng $(B'CK)$.

c) Khi M là trung điểm AD. Chứng minh rằng đường thẳng $B'M$ tiếp xúc với mặt cầu đường kính AA'.

Giải:

Kết luận: □

Bài 6.15.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, $AC=2a$, $AA'=2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC}=120^o$. Gọi M là trung điểm của CC'. Chứng minh $MB\perp MA'$ và tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng $(A'BM)$.

Giải:

Kết luận: □

Bài 6.16. *(Đề thi tuyển sinh đại học, khối D năm 2007)*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $BA = BC = a$, $AD = 2a$, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Giải:

Kết luận: □

Bài 6.17.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy hình chóp. Cho $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh $SC \perp (AHK)$ và tính thể tích khối chóp $OAHK$.

Giải:

Kết luận: □

Bài 6.18.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích khối tứ diện $SACD$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SB, AC.

Giải:

Kết luận: □

Bài 6.19. *(Đề thi tuyển sinh đại học, khối D năm 2008)*

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, $B'C$.

Giải:

Kết luận: □

Bài 6.20. *(Đề thi tuyển sinh đại học, khối D năm 2009)*

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

Giải:

Kết luận: □

Bài 6.21.

Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Tính thể tích khối chóp và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ biết rằng $BM \perp AN$.

Giải:

Kết luận: □

Bài 6.22.
Cho tam giác ABC vuông tại C. Tìm các điểm M trong không gian thỏa mãn $MA^2+MB^2 \leq MC^2$.

Giải:

Kết luận: □

Bài 6.23.
Cho tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$ có cạnh bằng c. Gọi (P) là mặt phẳng quay quanh tâm của tứ diện. Gọi B_1, B_2, B_3, B_4 lần lượt là hình chiếu của A_1, A_2, A_3, A_4 trên mặt phẳng (P). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $T = A_1B_1^4 + A_2B_2^4 + A_3B_3^4 + A_4B_4^4$ theo c và xác định vị trí của mặt phẳng (P) khi đó.

Giải:

Kết luận: □

Bài 6.24.
Cho tứ diện đều $ABCD$. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến các mặt của tứ diện bằng k^2 cho trước.

Giải:

Kết luận: □

.

7 - Một số bài toán tổng hợp

Bài 7.1.
Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có M là trung điểm cạnh AB, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 90^o$ và $\widehat{ABC} = 60^o$, cạnh bên CC_1 tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45^o, hình chiếu vuông góc của C_1 lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CM. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (ACC_1A_1).

Giải:

Gọi H là trung điểm CM. Từ giả thiết $\Rightarrow C_1H \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{C_1CH} = (\widehat{CC_1;(ABC)}) = 45^o$.

Từ tam giác vuông ABC với $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^o \Rightarrow AC = 2a\sqrt{3}, AM = 4a$, $CM = \dfrac{1}{2}AB = 2a$

$$\Rightarrow CH = a \Rightarrow C_1H = CH\tan 45^o = a.\ V_{ABC.A_1B_1C_1} = C_1H.S_{ABC} = a.2a^2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}a^3.$$

Kẻ $HK \perp AC \Rightarrow$ đường xiên $C_1K \perp AC \Rightarrow (\widehat{(ABC);(ACC_1A_1)}) = \widehat{C_1KH}$.

Tam giác MCA cân tại $M \Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{MAC} = 30^o \Rightarrow HK = HC.\sin 30^o = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow \tan(\widehat{C_1KH}) = \dfrac{CH}{HK} = 2 \Rightarrow (\widehat{(ABC);(ACC_1A_1)}) = \arctan 2.$ □

Bài 7.2.
Cho hình chóp $S.ABCD$có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AD = DC$, $AB = 2AD$, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh $2a$ và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SA theo a.

Giải:

Gọi M là trung điểm AB, H là trung điểm BC. Ta có $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABCD)$, $SH = a\sqrt{3}$.
Tứ giác $AMCD$ là hình vuông nên $CM = AM = MB$. Suy ra $\triangle CMB$ vuông cân.
Do đó $CM = a\sqrt{2}$, $AB = 2a\sqrt{2}$, $CD = a\sqrt{2}$.
Diện tích $S_{ABCD} = \dfrac{(AB+CD).CM}{2} = 3a^2$. Thể tích $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \sqrt{3}a^3$.
Kẻ đường thẳng Δ đi qua A, $\Delta // BC$. Hạ $HI \perp \Delta$ $(I \in \Delta)$.
Suy ra $BC // (SAI)$. Do đó $d(BC, SA) = d(BC, (SAI)) = d(H, (SAI))$.
Hạ $HK \perp SI$ $(K \in SI)$. Suy ra $HK \perp (SAI)$. Do đó $d(H, (SAI)) = HK$.
Ta có $CM = AM = MB$ nên tam giác ACB vuông tại C. Suy ra $HI = AC = 2a$.
Do đó $d(BC, SA) = HK = \dfrac{HI.SH}{\sqrt{HI^2 + SH^2}} = \dfrac{2\sqrt{21}a}{7}$. □

Bài 7.3.
Cho hình chóp $S.ABC$có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AB. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 45^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM theo a.

Giải:

Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB, BM. Ta có $SH \perp (ABC)$, $HK \parallel AM$
suy ra $HK \perp BC \Rightarrow \widehat{SHK} = 45^o$ nên $SH = HK = \dfrac{AM}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Diện tích $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AM.BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Thể tích $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{a^3}{16}$.
Gọi N là trung điểm $AC \Rightarrow MN \parallel AB \Rightarrow AB \parallel (SMN) \Rightarrow d(AB, SM) = d(AB, (SMN)) = d(H, (SMN))$.
Gọi I là giao điểm của CH là MN. Suy ra I là trung điểm của CH và $MN \perp CH$.
Hạ $HJ \perp SI \Rightarrow HJ \perp (SMN) \Rightarrow d(H, (SMN)) = HJ$. Ta có $HI = \dfrac{1}{2}CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$
nên $d(AB, SM) = HJ = \dfrac{HI.SH}{\sqrt{HI^2 + SH^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{8}$. □

Bài 7.4.
Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = \alpha$ với $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$, cạnh bên $AA' = 2a$. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DM} = k.\overrightarrow{DA}$ và N là trung điểm của cạnh $A'B'$. Tính thể tích khối tứ diện $C'MD'N$ theo a và tìm k để $C'M \perp D'N$.

Giải:

* Ta có $V_{C'MD'N} = \dfrac{1}{3}d(M, (A'B'C'D')).S_{C'ND} = \dfrac{1}{3}d(M, (A'B'C'D')).\dfrac{1}{2}S_{ABCD}$

$$= \frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.a.a.\sin\alpha = \frac{a^3}{3}\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}.$$

* Đặt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{z}$. Ta có

$$\overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{x} - \overrightarrow{z} - k\overrightarrow{y} \quad \overrightarrow{D'N} = \overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{A'N} = -\overrightarrow{y} + \frac{1}{2}\overrightarrow{x}.$$

Khi đó $C'M \perp D'N \Leftrightarrow \overrightarrow{C'M}.\overrightarrow{D'N} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{x} + k\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{x}|^2 - k|\overrightarrow{y}|^2 + \left(\dfrac{k}{2} - 1\right)\overrightarrow{x}\overrightarrow{y} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}a^2 - ka^2 + \left(\dfrac{k}{2} - 1\right).a.a.\dfrac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{2}{5}$. □

Bài 7.5.
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DM} = k.\overrightarrow{DA}$ và N là trung điểm của cạnh $A'B'$. Tính thể tích khối tứ diện $C'MD'N$ theo a và tìm k để $C'M \perp D'N$.

Giải:

Ta có $V_{C'MD'N} = \frac{1}{3}d\left(M, (A'B'C'D')\right).S_{C'ND'} = \frac{1}{3}d\left(M, (A'B'C'D')\right).\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{z}$.

Ta có $\overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{x} - \overrightarrow{z} - k\overrightarrow{y}$ $\overrightarrow{D'N} = \overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{A'N} = -\overrightarrow{y} + \frac{1}{2}\overrightarrow{x}$.

Khi đó $C'M \perp D'N \Leftrightarrow \overrightarrow{C'M}.\overrightarrow{D'N} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{x} + k\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{x}\right|^2 - k\left|\overrightarrow{y}\right|^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a^2 - 2ka^2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$. □

Bài 7.6.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SBC) một góc bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a và tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

Giải:

Vì $(SBC) \perp (ABCD)$, $CD \perp BC$, $CD \subset (ABCD)$ nên $CD \perp (SBC) \Rightarrow \widehat{DSC} = (SD; (SBC)) = 60^o$

$\Rightarrow SC = CD.\cot 60^o = a$. Suy ra $SB = a\sqrt{2}$. Kẻ $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Từ tam giác SBC vuông ta có $SH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Suy ra $V_{SABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Kẻ $SK \perp BD$. Khi đó hình chiếu $HK \perp BD$. Suy ra $(SBD, ABCD) = \widehat{SKH}$.

Từ tam giác vuông SBC ta có $BH = \frac{SB^2}{BC} = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow HK = BH.\sin 45^o = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Suy ra ΔSHK vuông cân tại H. Do đó $\widehat{SKH} = 45^o$. Vậy $(SBD, ABCD) = 45^o$. □

Bài 7.7.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có SD vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $\widehat{BAD} = 120^o$. Đường thẳng SA tạo với mặt phẳng (SBD) một góc bằng α với $\cot\alpha = 3$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Giải:

Gọi $O = AC \cap BD$. Từ giả thiết suy ra $AC \perp (SBD)$ tại O nên $\widehat{ASO} = (SA; (SBD) = \alpha$. $\widehat{BAD} = 120^o$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = 60^o \Rightarrow \triangle ADC$ đều cạnh a. Suy ra $S_{ABCD} = 2S_{ADC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ và $DO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AO = \frac{a}{2}$.

Do đó $$SO = AO.\cot\alpha = \frac{3a}{2} \Rightarrow SD = \sqrt{SO^2 - OD^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $$V_{SABCD} = \frac{1}{3}SD.S_{ABCD} = \frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}.$$

Kẻ $DH \perp SO$. Vì $AC \perp (SBD)$ nên $AC \perp DH$. Suy ra $DH \perp (SAC)$ (1)

Ta có $\triangle SDO$ vuông tại D nên $DH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (2)

Vì O là trung điểm BD nên $d(B; (SAC)) = d(D; (SAC))$ (3)

Từ (1),(2) và (3) ta suy ra $d(B; (SAC)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. □

Bài 7.8.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân $(AB \parallel CD), AB = 2CD = 4a$, $BC = a\sqrt{10}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và tính cosin góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

Giải:

Gọi H là hình chiếu của C trên AB; M,N là trung điểm của AB,CD.
Ta có $HB = \dfrac{AB-CD}{2} = a \Rightarrow CH = 3a \Rightarrow OM = 2a$, $ON = a$ nên ΔOAB vuông cân.
Suy ra $OA = OB = 2a\sqrt{2}$. Do đó $SO = OB = 2a\sqrt{2}$. Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = 6a^3\sqrt{2}$.
$BC \parallel DM$ nên $(\widehat{SD, BC}) = (\widehat{SD, DM}) = \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
Ta có $DM = BC = a\sqrt{10}$, $SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = a\sqrt{10}$, $SM = 2a\sqrt{3}$.
Suy ra $\cos\widehat{SDM} = \dfrac{2}{5}$. Vậy $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$. □

Bài 7.9.
Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a$, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 120^o$ và đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ góc 30^o. Gọi M là trung điểm BB'. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, CC' theo a.

Giải:

Kẻ $CH \perp AB$. Vì $AA' \perp (ABC)$ nên $AA' \perp CH \Rightarrow CH \perp (ABB'A') \Rightarrow \widehat{CA'H} = (A'C, (ABB'A')) = 30^o$.
Sử dụng định lí cosin và công thức diện tích cho ΔABC ta có $AB = A\sqrt{7}$,
$CH = \dfrac{2S_{ABC}}{AB} = \dfrac{A.2A.\sin 120^o}{A\sqrt{7}} = A\sqrt{\dfrac{3}{7}}. \Rightarrow CA' = 2CH = 2A\sqrt{\dfrac{3}{7}} \Rightarrow AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = A\sqrt{\dfrac{5}{7}}$.
Thể tích lăng trụ là $V = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{\dfrac{5}{7}}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{105}}{14}$.
Mặt phẳng $(ABB'A')$ chứa AM và song song CC'
$\Rightarrow d(AM, CC') = d(C, (ABB'A')) = CH = a\sqrt{\dfrac{3}{7}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$ □

Bài 7.10.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$bằng 60^o. Gọi H là trung điểm của AB. Biết mặt bên SAB là tam giác cân tại đỉnh S và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AHC$.

Giải:

Từ giả thiết suy ra $SH \perp (ABCD)$. Vẽ $HF \perp AC$ $(F \in AC) \Rightarrow SF \perp AC$ (đlí ba đường vuông góc).
Suy ra $\widehat{SFH} = 60^o$. Kẻ $BE \perp AC$ $(E \in AC)$. Khi đó $HF = \dfrac{1}{2}BE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$.
Ta có $SH = HF.\tan 60^o = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{a^3}{3}$.
Gọi J, r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC.
Ta có $r = \dfrac{AH.HC.AC}{4S_{AHC}} = \dfrac{AH.HC.AC}{2S_{ABC}} = \dfrac{3a\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$. Kẻ đường thẳng Δ qua J và $\Delta \parallel SH$.
Khi đó tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AHC$ là giao điểm của đường trung trực đoạn SH và Δ trong mặt phẳng (SHJ).
Ta có $IH = \sqrt{IJ^2 + JH^2} = \sqrt{\dfrac{SH^2}{4} + r^2}$. Suy ra bán kính mặt cầu là $R = a\sqrt{\dfrac{31}{32}}$. □

Bài 7.11.
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng $a>0$ và $\widehat{BAD}=\widehat{DAA'}=\widehat{A'AB}=60^o$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD. Chứng minh $MN\|(A'C'D)$ và tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng MN và $B'C$.

Giải:

Gọi I là trung điểm DC'. Vì $NI\|CC'$ và $NI=\dfrac{1}{2}CC'$ nên $NI=MA'$ và $NI\|MA'$.

Suy ra $MN\|A'I$. Do đó $MN\|(DA'C')$. Vì $MN\|AI, B'C\|A'D$ nên $(\widehat{MN,\, B'C})=(\widehat{A'I,\, A'D})$ (1)

Sử dụng giả thiết và định lí cosin cho các tam giác ta thu được $A'D=a$, $DC'=A'C'=a\sqrt{3}$.

Suy ra $A'I^2=\dfrac{A'D^2+A'C'^2}{2}-\dfrac{DC'^2}{4}=\dfrac{5a^2}{4}\Rightarrow A'I=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Trong $\triangle A'DI$ ta có $\cos\widehat{DA'I}=\dfrac{A'D^2+A'I^2-DI^2}{2A'D.A'I}=\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\cos(MN,\,B'C)=|\cos\widehat{DA'I}|=\dfrac{3}{2\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. □

Bài 7.12.
Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có $SA=SB=SC=2a$, $AB=3a$, $BC=a\sqrt{3}$ $(a>0)$. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp theo a.

Giải:

Kẻ $SH\perp AC$. Do $SA=SC$ nên H là trung điểm AC (1)

Vì $(SAC)\perp(ABC)$ nên $SH\perp(ABC)\Rightarrow HA=HC=HB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ABC$ vuông tại B có H là tâm đường tròn nội tiếp.

Do đó $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{3}a\Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=a$.

SH là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, trong mặt phẳng (SAC) đường trung trực của SA cắt SH tại O là tâm mặt cầu. Gọi K là trung điểm SA. Khi đó hai tam giác vuông SOK và SAH đồng dạng nên $\dfrac{SO}{SA}=\dfrac{SK}{SH}$. Suy ra bán kính mặt cầu $R=SO=\dfrac{SK.SA}{SH}=2a$.

Suy ra diện tích mặt cầu là $S=4\pi R^2=16\pi a^2$. □

Bài 7.13.
Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O'; $OO'=a$. Gọi A,B là hai điểm thuộc đường tròn đáy tâm O, điểm A' thuộc đường tròn đáy tâm O' sao cho OA, OB vuông góc với nhau và AA' là đường sinh của hình trụ. Biết góc giữa đường thẳng AO' và mặt phẳng $(AA'B)$ bằng 30^o. Tính thể tích khối trụ theo a.

Giải:

Gọi B' thuộc đường tròn (O') sao cho $BB'\|AA'$; M là trung điểm của $A'B'$.

Ta có $\triangle A'B'O'$ vuông cân tại O'. Suy ra $O'M\perp A'B'$. Do đó $O'M\perp(AA'B)$. Suy ra $\widehat{O'AM}=30^o$.

Ta có $AO'=\dfrac{O'M}{\sin 30^o}=2.O'M$. Mà $O'M=\dfrac{\sqrt{2}}{2}O'A'$ nên $A'O=\sqrt{2}.O'A'$.

Trong tam giác $AA'O$ ta có$AO'^2=AA'^2+A'O'^2\Leftrightarrow O'A'=a$. Vậy $V=\pi a^3$. □

Bài 7.14.
Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có $AA_1=3a$, $BC=a$, $AA_1\perp BC$, khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và B_1C bằng $2a$ $(a>0)$. Tính thể tích khối lăng trụ theo a.

Giải:

Từ giả thiết suy ra BB_1C là tam giác vuông tại B và $S_{BB_1C}=\dfrac{1}{2}BB_1.BC=\dfrac{3a^2}{2}$.

Mặt phẳng (BB_1C) chứa B_1C và song song với AA_1 nên $d(AA_1;B_1C)=d(A;BB_1C)=2a$.

Suy ra $$V_{A.BB_1C}=\frac{1}{3}d(A;BB_1C).S_{BB_1C}=a^3.$$

Vì chung đáy và chung đường cao nên Vlăng trụ $=3.V_{B_1.ABC}=3.V_{A.BB_1C}=3a^3$ □

Bài 7.15.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC\perp(ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B. Biết rằng $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$ $(a>0)$ và góc giữa hai mặt phẳng $(SAB),(SAC)$ bằng α với $\tan\alpha=\sqrt{\frac{13}{6}}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

Giải:

Gọi H,K là hình chiếu của C lên SA,SB. Ta chứng minh được $CK\perp(SAB)$, $SA\perp(CHK)$.

Suy ra $\triangle CHK$ vuông tại K và $SA\perp KH$. Do đó $\alpha=\widehat{CHK}$.

Từ $\tan\alpha=\sqrt{\frac{13}{6}}\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{\frac{13}{19}}\Leftrightarrow\frac{CK^2}{CH^2}=\frac{13}{19}$ (1)

Đặt $SC=x>0$. Trong tam giác vuông SAC ta có $\frac{1}{CH^2}=\frac{1}{CA^2}+\frac{1}{CS^2}\Rightarrow CH^2=\frac{3a^2x^2}{3a^2+x^2}$.

Tương tự, trong tam giác vuông SBC ta có $CK^2=\frac{2a^2x^2}{2a^2+x^2}$.

Do đó từ (1) $\Rightarrow\frac{2(3a^2+x^2)}{3(2a^2+x^2)}=\frac{13}{19}\Leftrightarrow x=6a$, vì $x>0$.

Suy ra $V_{SABC}=\frac{1}{3}SC.S_{ABC}=\frac{1}{3}SC.\frac{1}{2}AB.BC=\sqrt{2}a^3$. □

Bài 7.16.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông, $\widehat{A}=\widehat{D}=90^o$, $AB=AD=2a$, $CD=a$, góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) bằng 60^o, mặt bên SAD là tam giác cân tại S, mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC) theo a.

Giải:

Vì ΔSAD cân tại S, nên gọi H là trung điểm của AD thì $SH\perp AD$,

mặt khác $(SAD)\perp(ABCD)$ nên SH là đường cao hình chóp $S.ABCD$.

Kẻ $HK\perp BC$ thì $SK\perp BC$, tức $\widehat{SKH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

Suy ra: $\widehat{SKH}=60^o$ Ta có: $SH=HK.\tan 60^o=HK\sqrt{3}$.

Dễ thấy $BC=a\sqrt{5}$ và do $HK.BC=2S_{HBC}, S_{HBC}=S_{ABCD}-(S_{HAB}-S_{HCD})$ nên $HK=\frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Suy ra: $SH=\frac{3a\sqrt{15}}{5}$ Do đó : $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH=\frac{1}{6}(AB+CD).AD.SH=\frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$

Kẻ $HI\perp SK(I\in SK)$, suy ra: $HI\perp(SBC)$.Gọi E là giao điểm của AD và BC.

Dễ thấy: $DE=\frac{2}{3}HE\Rightarrow d(D;(SBC))=\frac{2}{3}d(H;(SBC))=\frac{2}{3}HI$

Do $\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HK^2}=\frac{250}{135a^2}\Rightarrow HI=\frac{9a\sqrt{2}}{10}$. Vậy $d(D;(SBC))=\frac{3a\sqrt{2}}{5}$. □

Bài 7.17.

Cho hình chóp $S.ABCD$,đáy là hình chữ nhật có$AB=3,BC=6$,mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy,các mặt phẳng (SBC) và (SCD) cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ các góc bằng nhau.Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SAvà BD bằng $\sqrt{6}$.Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và côsin góc giữa hai đường thẳng SAvà BD.

Giải:

Hạ $SH\perp AB \Rightarrow SH\perp(ABCD)$ (do $(SAB)\perp(ABCD)=AB$)

Kẻ $HK\perp CD \Rightarrow$ tứ giác $HBCK$ là hình chữ nhật.

Ta thấy $BC\perp(SAB)\Rightarrow \widehat{SBH}=((SBC),(ABCD))$, $\quad CD\perp(SHK)\Rightarrow \widehat{SKH}=((SCD),(ABCD))$

theo gt $\widehat{SBH}=\widehat{SKH}\Rightarrow \Delta SHB=\Delta SHK$ (gcg) $\Rightarrow HB=HK=BC=6$ do đó A là trung điểm HB.

Ta thấy $ABDK$là hình bình hành$\Rightarrow BD\parallel AK \Rightarrow BD\parallel(SAK)$

mà $SA\in(SAK)\Rightarrow d(BD,SA)=d(BD,(SAK))=d(D,(SAK))=d(H,(SAK))=\sqrt{6}=h$

Do tam diện $H.SAK$ vuông tại $H \Rightarrow \dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{HS^2}+\dfrac{1}{HA^2}+\dfrac{1}{HK^2}\ \dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{HS^2}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{36}$

$\Rightarrow SH^2=36\Rightarrow SH=6\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.dt_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.6.3.6=36$ (đvị dt).

Gọi β là góc giữa hai đường thẳng BD và $SA\Rightarrow \beta=(BD,SA)=(AK,SA)$

Ta có $\qquad SK=6\sqrt{2}, SA=AK=3\sqrt{5}.$

Trong tam giác SAK: $\quad \cos\widehat{SAK}=\dfrac{AS^2+AK^2-SK^2}{2AS.AK}=\dfrac{45+45-72}{2.3\sqrt{5}.3\sqrt{5}}=\dfrac{1}{5}$

Vậy $\beta=\widehat{SAK}=\arccos\dfrac{1}{5}$ □

Bài 7.18.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a, $SA=SB=a$, $SD=a\sqrt{2}$ và mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.

Giải:

Theo giả thiết $(ABCD)\cap(SBD)$ theo giao tuyến BD. Do đó nếu dựng $AO\perp(SBD)$ thì $O\in BD$.

Mặt khác $AS=AB=AD\Rightarrow OS=OB=OD$ hay SBD là tam giác vuông tại S.

Từ đó: $BD=\sqrt{SB^2+SD^2}=\sqrt{a^2+2a^2}=a\sqrt{3}\ AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{3a^2}{4}}=\dfrac{a}{2}$

Suy ra thể tích khối chóp $S.ABD$ được tính bởi:

$$V_{S.ABD}=V_{A.SBD}=\frac{1}{3}S_{SBD}.AO=\frac{1}{6}SB.SD.AO=\frac{1}{6}a.a\sqrt{2}.\frac{a}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD}=2V_{S.ABD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\text{ (đvtt).}$$

Trong $\triangle SBD$ dựng $OH\perp SD$ tại H $\quad$ (1), nên H là trung điểm của SD.

Theo chứng minh trên $AO\perp(SBD)\Rightarrow AO\perp OH$ $\quad$ (2)

(1) và (2) chứng tỏ OH là đoạn vuông góc chung của AC và SD

Vậy $d(AC,BD)=OH=\dfrac{1}{2}SB=\dfrac{a}{2}$ □

Bài 7.19.

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng a, đáy ABC là tam giác đều, hình chiếu của A trên $(A'B'C')$ trùng với trọng tâm G của $\triangle A'B'C'$. Mặt phẳng $(BB'C'C)$ tạo với $(A'B'C')$ góc 60^o. Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

Giải:

Gọi M,M' lần lượt là trung điểm $BC,B'C'\Rightarrow A',G,M'$ thẳng hàng và $AA'M'M$ là hình bình hành. $A'M'\perp B'C', AG\perp B'C'\Rightarrow B'C'\perp(AA'M'M)$. Suy ra góc giữa $(BCC'B')$ và $(A'B'C')$ là góc giữa $A'M'$ và MM' bằng $\widehat{M'MA}=60^o$.

Đặt $x=AB$. Ta có$\triangle ABC$ đều cạnh x có AM là đường cao. $\Rightarrow AM=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}=A'M', A'G=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

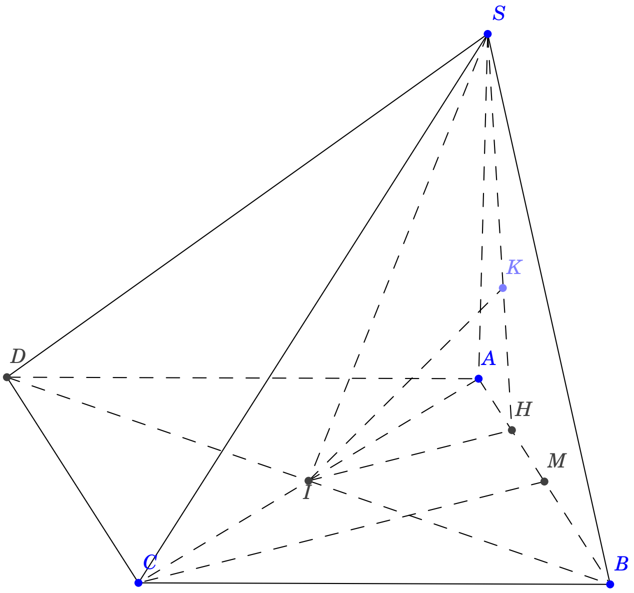
Trong$\triangle AA'G$ vuông có $AG=AA'\sin 60^o=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $A'G=AA'\cos 60^o=\dfrac{a}{2}=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 60^o = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}.$$

$V_{ABC.A'B'C'} = AG.S_{\Delta ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{3a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{9a^3}{32}.$ □

Bài 7.20. *Đề thi thử ĐH lần 1 khối D-2012-THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu-Đồng Tháp*
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và có góc $\widehat{ABC} = 60^0$, hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng 30^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, CD theo a.

Giải:



Gọi I là tâm hình thoi $ABCD$, khi đó $(SAC)\cap(SBD) = SI$. Vì hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy $ABCD$ nên suy ra $SI \perp mp(ABCD)$.

$\triangle ABC$ cân đỉnh B và $\widehat{ABC} = 60^0$ nên $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a. Do đó gọi M là trung điểm AB thì $BI = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $IH \perp AB$ tại H, thì ta có $SH \perp AB$. Bởi vậy:

$$(\widehat{mp(SAB);mp(ABCD)}) = \widehat{SHI} = 30^0 \text{ và } IH = \frac{1}{2}CM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$SI = IH\tan\widehat{SHI} = \frac{a\sqrt{3}}{4}\tan 30^0 = \frac{a}{4}$$

Vậy: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}dt(ABCD).SI = \frac{1}{3}.AC.BI.SI = \frac{1}{3}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$

Kẻ $IK \perp SH$ tại K, khi đó $IK \perp mp(SAB)$.

Trong tam giác vuông SIH, ta có:

$$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IH^2} = \frac{16}{a^2} + \frac{16}{3a^2} = \frac{64}{3a^2}$$

Suy ra: $IK = \frac{a\sqrt{3}}{8}$.

Do $$CD \parallel mp(SAB)$$

nên $$d(SA;CD) = d(CD;mp(SAB)) = d(C;mp(SAB)) = 2d(I;mp(SAB)) = 2IK$$

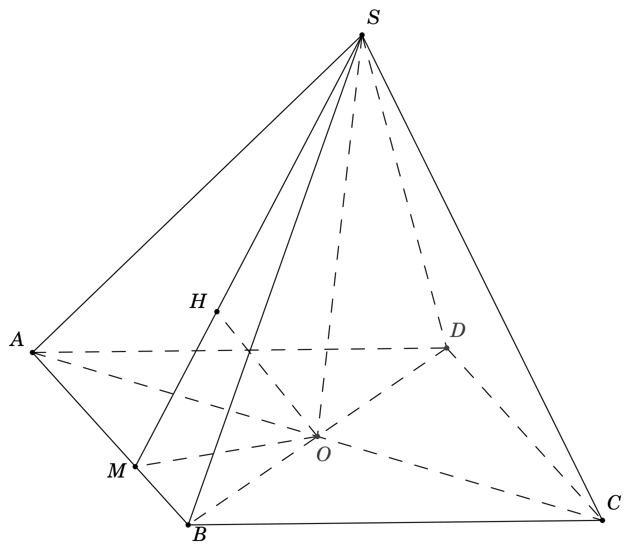
Vậy: $d(SA;CD) = 2\frac{a\sqrt{3}}{8} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Kết luận: $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$; $d(SA;CD) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ □

Bài 7.21. *Đề thi thử ĐH QX 4*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi; hai đường chéo $AC = 2\sqrt{3}a$, $BD = 2a$ và cắt nhau tại O; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Giải:



Vì $mp(SAC) \cap mp(SBC) = SO$ và $mp(SAC) \perp mp(ABCD)$, $mp(SBD) \perp mp(ABCD)$ nên suy ra $SO \perp mp(ABCD)$

Kẻ $OM \perp AB$ tại M, kẻ $OH \perp SM$ tại H. Khi đó $AB \perp mp(SOM) \Longrightarrow AB \perp OH$, do đó $OH \perp mp(SAB)$.

Bởi vậy: $OH = d(O;mp(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong tam giác vuông OAB, ta có: $\dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2}$

Trong tam giác vuông SOM, ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{SO^2} \Longrightarrow \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{OH^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{16}{3a^2} - \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{4}{a^2}$.

Hay: $SO = \dfrac{a}{2}$.

Vậy: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.dt(ABCD).SO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}.AC.BD.SO = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Kết luận: $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ □

Bài 7.22. *Đề thi ĐH - CĐ 2012 - THPT Đô Lương 4 - Nghệ An*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và D. Biết $AB = 2a$, $AD = a$, $DC = a (a > 0)$ và SA vuông góc với mặt đáy (ABCD). Góc tạo bởi giữa mặt phẳng (SBC) với đáy bằng 45^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ B đến $mp(SCD)$ theo a.

Giải:

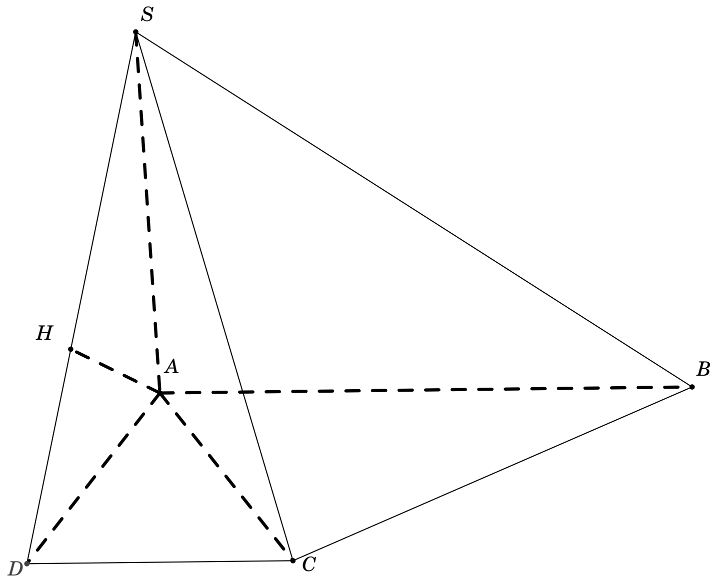
Từ giả thiết ta có $BC \perp AC$ và $BC \perp SA$, nên $BC \perp mp(SAC)$. Do vậy: $(\widehat{(SBC);(ABCD)}) = \widehat{SCA} = 45^0$.

Từ $SA \perp mp(ABCD)$ suy ra $\triangle SAC$ vuông tại A, kết hợp với $\widehat{SCA} = 45^0$,ta có $SA = AC = a\sqrt{2}$

Vậy: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}dt(ABCD).SA = \dfrac{1}{6}.(AB + CD).AD.SA = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Kẻ $AH \perp SD$ tại H, dễ dàng chứng minh được $AH \perp mp(SCD)$. Trong tam giác SAD vuông tại

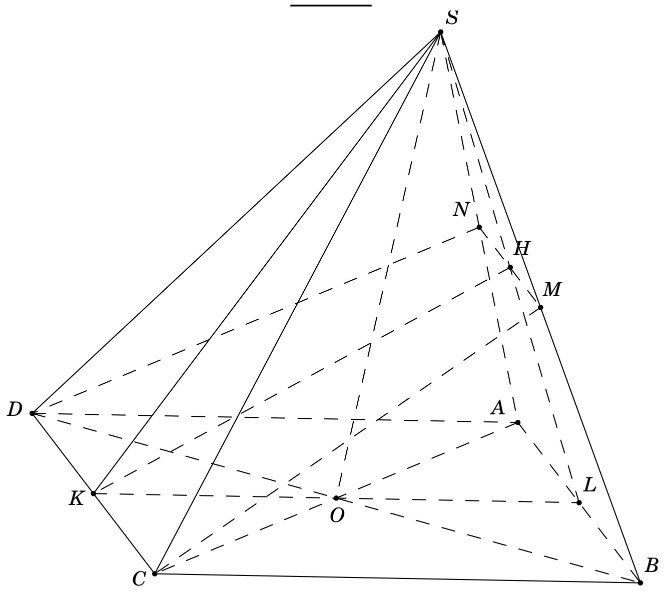
A, ta có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{3}{2a^2}$. Suy ra: $AH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ Do $AB \parallel CD \Longrightarrow AB \parallel mp(SCD)$, nên:
$d(B;mp(SCD))=d(A;mp(SCD))=AH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$
Kết luận:$V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ và $d(B;mp(SCD))=\frac{a\sqrt{6}}{3}$



□

Bài 7.23. *Đề thi thử ĐH - CĐ 2012 - THPT Triệu Sơn 4*
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, mặt bên tạo với mặt đáy một góc 60^0. Mặt phẳng (P) chứa AB và tạo với mặt đáy một góc 30^0 cắt SC, SD lần lượt tại M và N. Tính thể tích khối chóp $S.ABMN$.

Giải:

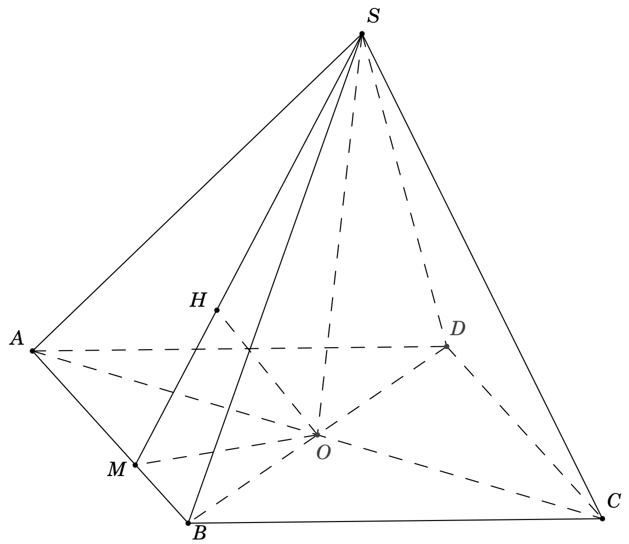


Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $SO \perp mp(ABCD)$. Gọi K, L lần lượt là trung điểm AB, CD, gọi H là trung điểm SL, khi đó $AB \perp mp(SKL)$. Do đó: $\widehat{SKH}=(\widehat{mp(SAB);mp(ABCD)})=60^0$.

Hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SK = SL$, kết hợp với $\widehat{SKH} = 60^0 \Rightarrow$ tam giác SKL là tam giác đều cạnh a. Bởi vậy $HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{KL\sqrt{3}}{2}$ và $SH \perp KL$, $\widehat{HKL} = 30^0$.
Từ đó ta có $\widehat{mp(ABH);mp(ABCD)} = \widehat{HKL} = 30^0$, hay $mp(P)$ trùng với $mp(ABH)$.
Vì $AB \parallel CD$ và H là trung điểm SL nên mặt phẳng (P) cắt SC, SD lần lượt tại M và N thì M, N lần lượt là trung điểm SC, SD. Suy ra $MN = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$. Mặt khác, do $AB \perp mp(SKL)$ nên $HK \perp AB$, $HK \perp CD$.
Vậy: $V_{S.ABMN} = \dfrac{1}{3}.dt(ABMN).SH = \dfrac{1}{6}.(AB + MN).HK.SH = \dfrac{1}{6}.(a + \dfrac{a}{2}).\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.
Kết luận: $V_{S.ABMN} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$ □

Bài 7.24. *Đề thi thử ĐH QX 4*
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi; hai đường chéo $AC = 2\sqrt{3}a$, $BD = 2a$ và cắt nhau tại O; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Giải:

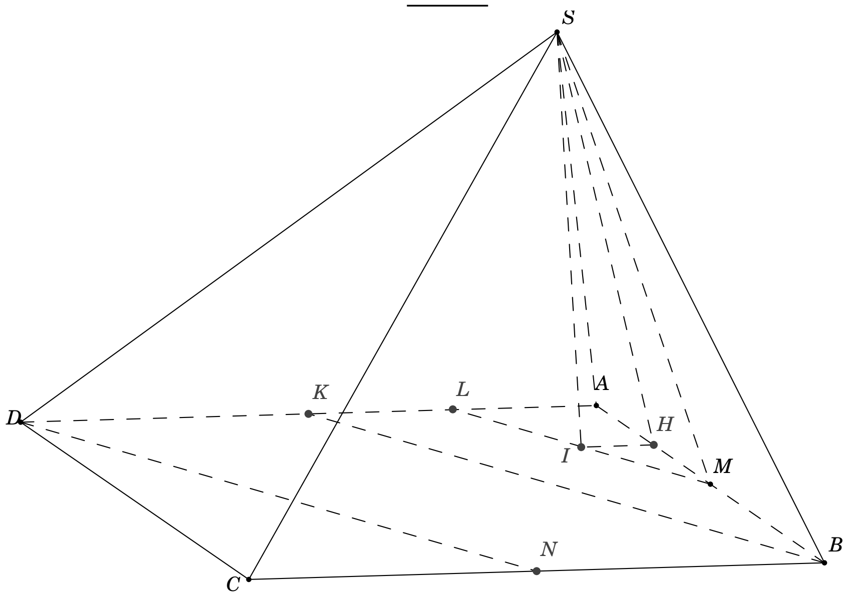


Vì $mp(SAC) \cap mp(SBC) = SO$ và $mp(SAC) \perp mp(ABCD)$, $mp(SBD) \perp mp(ABCD)$ nên suy ra $SO \perp mp(ABCD)$
Kẻ $OM \perp AB$ tại M, kẻ $OH \perp SM$ tại H. Khi đó $AB \perp mp(SOM) \Longrightarrow AB \perp OH$, do đó $OH \perp mp(SAB)$.
Bởi vậy: $OH = d(O;mp(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Trong tam giác vuông OAB, ta có: $\dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2}$
Trong tam giác vuông SOM, ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{SO^2} \Longrightarrow \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{OH^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{16}{3a^2} - \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{4}{a^2}$.
Hay: $SO = \dfrac{a}{2}$.
Vậy: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.dt(ABCD).SO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}.AC.BD.SO = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Kết luận: $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ □

Bài 7.25. *Đề thi thử ĐH - CĐ 2012 - THPT Chuyên Nguyễn Huệ*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$. $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 60^0$ và $mp(SAB)$ vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N là trung điểm của AB, BC. Tính thể tích tứ diện $NSDC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM và DN.

Giải:



Từ $AB = 2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3} \Rightarrow \triangle SAB$ vuông tại S.

Kẻ $SH \perp AB$ tại H, do $mp(SAB) \perp mp(ABCD)$ nên suy ra $SH \perp mp(ABCD) \Rightarrow SH$ là đường cao của tam giác vuông SAB. Từ đó:

$SH = \dfrac{SA.SB}{AB} = \dfrac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác: $dt(\triangle CDN) = \dfrac{1}{2}.CD.CN.\sin\widehat{DCN} = \dfrac{1}{2}.2a.a.\sin 60^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Do vậy: $V_{NSDC} = V_{S.CDN} = \dfrac{1}{3}.dt(\triangle CDN).SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{4}$.

Gọi K là trung điểm AD, L là trung điểm AK, I là trung điểm ML. Do $SA = SM = a$ và $SH \perp AB$ nên suy ra H là trung điểm AM.

Ta có: $BK^2 = BA^2 + AK^2 - 2.BA.AK.\cos\widehat{BAK} = 3a^2 \Rightarrow BK = a\sqrt{3}$.

Từ đó: $BK^2 + AK^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2 = AB^2 \Rightarrow \triangle ABK$ vuông tại $K \Rightarrow BK \perp AD \Rightarrow ML \perp AD \Rightarrow ML \perp HI$

Từ $ML \perp HI$ và $ML \perp SH \Rightarrow ML \perp SI$. Bởi vậy:

$\cos\widehat{SML} = \dfrac{MI}{SM} = \dfrac{ML}{2SM} = \dfrac{BK}{4SM} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

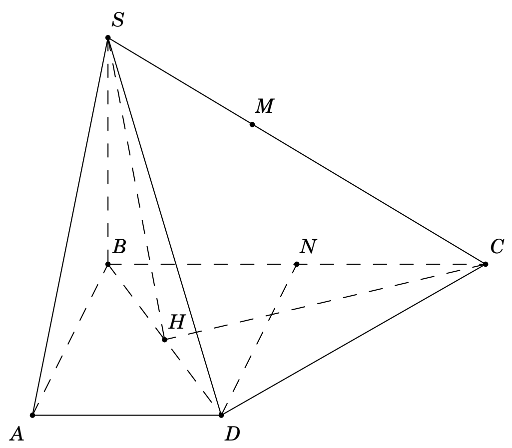
Vì $ML \parallel BK \parallel DN$ nên $(\widehat{SM;DN}) = (\widehat{SM;ML}) = \widehat{SML}$, với $\cos\widehat{SML} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Kết luận: $V_{NSDC} = \dfrac{a^3}{4}$ và $(\widehat{SM;DN}) = \widehat{SML}$, với $\cos\widehat{SML} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. □

Bài 7.26.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, điểm M nằm trên cạnh SC sao cho $MC = 2MS$, $AB = a$, $BC = 2AD = 2a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $M.ABCD$ theo a. Biết rằng $SA = SB = SC$ và góc tạo bởi cạnh bên SC và mặt đáy là 60^0.

Giải:



Gọi N là trung điểm BC thì $DN \perp BC$ và $DN = AB = a$, $CN = \dfrac{BC}{2} = a\sqrt{3}$. Bởi vậy: $CD^2 = DN^2 + CN^2 = a^2 + (a\sqrt{3})^2 = 4a^2 \Rightarrow CD = 2a \Rightarrow BD = 2a$.

Gọi H là trung điểm BD, do tam giác ABD vuông tại A nên $HA = HB = HD$, kết hợp với giả thiết $SA = SB = SD$ suy ra $SH \perp mp(ABCD)$. Từ đó:

$(SC; \widehat{mp(ABCD)}) = (\widehat{SC;CH}) = \widehat{SCH} = 60^0$.

Mặt khác: $CH^2 = \dfrac{BC^2 + DC^2}{2} - \dfrac{BD^2}{4} = 7a^2 \Rightarrow CH = a\sqrt{7}$.

Do đó: $SH = CH \tan\widehat{SCH} = a\sqrt{7}.\tan 60^0 = a\sqrt{21}$.

Vì $MC = 2MS$ nên:

$d(M; mp(ABCD)) = \dfrac{2}{3}.d(S; mp(ABCD)) = \dfrac{2}{3}.SH = \dfrac{2a\sqrt{21}}{3}$.

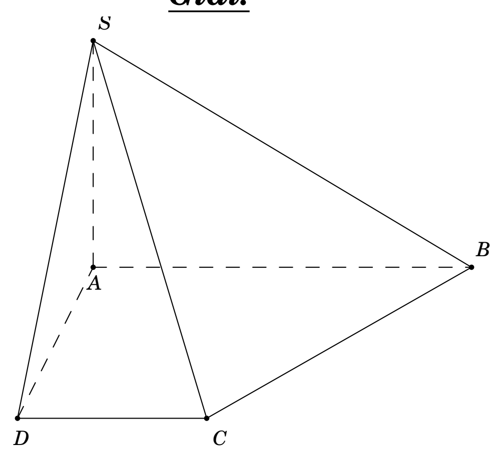
Bởi vậy:

$V_{M.ABCD} = \dfrac{1}{3}.dt(ABCD).d(M; mp(ABCD)) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{(AD+BC).AD}{2}.\dfrac{2}{3}.SH = a^3\sqrt{7}$ Kết luận:$V_{M.ABCD} = a^3\sqrt{7}$ □

Bài 7.27.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D. Biết $AB = 2a$, $AD = CD = a$, $SA = 3a (a > 0)$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp S.BCD và tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) theo a.

Giải:



Ta có: $dt(\triangle BCD) = \dfrac{1}{2}.CD.AD = \dfrac{a^2}{2}$.

Nên: $V_{S.BCD} = \frac{1}{3}.dt(\triangle BCD).SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.3a = \frac{a^3}{2}$.

Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases}$ nên $CD \perp SD$.

Mặt khác: $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{10} \Rightarrow dt(\triangle SCD) = \frac{1}{2}.CD.SD = \frac{a^2\sqrt{10}}{2}$.

Từ đó: $d(B; mp(SCD)) = \frac{3V_{S.BCD}}{dt(\triangle SCD)} = \frac{3a\sqrt{10}}{10}$

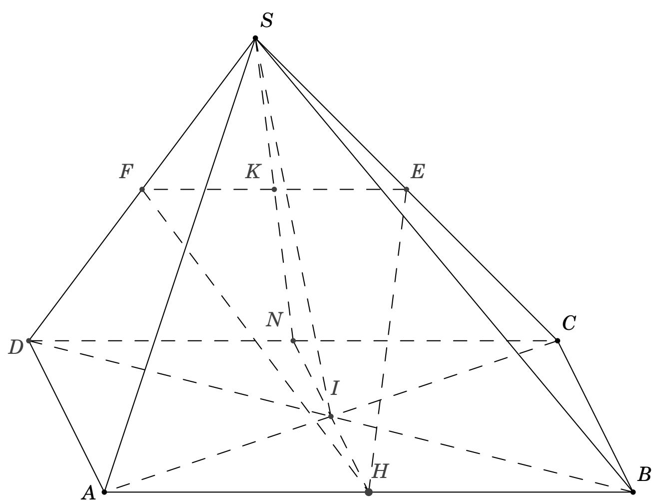
Kết luận:$V_{S.BCD} = \frac{a^3}{2}$ và $d(B; mp(SCD)) = \frac{3a\sqrt{10}}{10}$ □

Bài 7.28.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

1. *Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.*
2. *Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, SC, SD. Chứng minh $SN \perp mp(MEF)$*

Giải:



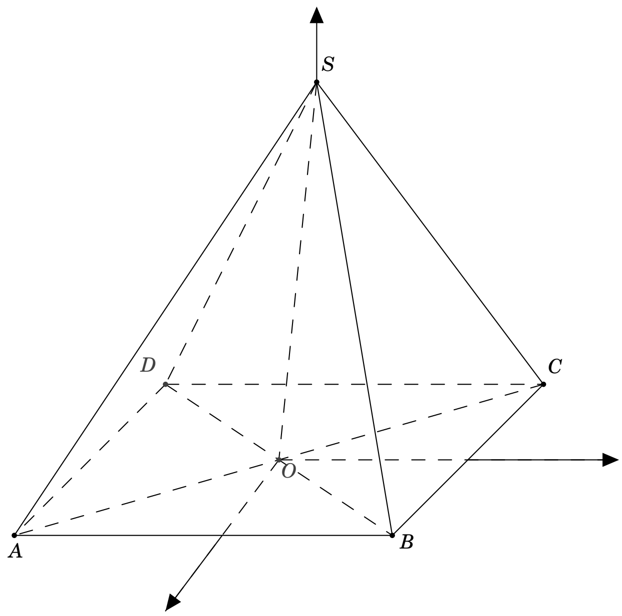
1. Gọi I là tâm hình chữ nhật $ABCD$. Vì $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$ nên suy ra $SI \perp mp(ABCD)$.
   Ta có: $AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow IA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.
   Trong tam giác vuông SIA, ta có: $SI = \sqrt{SA^2 - IA^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
   Do vậy:
   $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.dt(ABCD).SI = \frac{1}{3}.AB.BC.SI = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$
2. Gọi K là giao điểm của EF với SN thì K là trung điểm của SN.
   Ta có: $SM^2 = SA^2 - AM^2 = (a\sqrt{2})^2 - a^2 = a^2 \Rightarrow SM = MN = a \Rightarrow$ tam giác MSN cân đỉnh M.
   Do vậy: $MK \perp SN$.
   Mặt khác, tam giác SCD cân đỉnh S và N là trung điểm CD nên suy ra $SN \perp CD$.
   Mà $EF \parallel CD \Rightarrow SN \perp EF$.

Từ $\begin{cases} SN \perp MK \\ SN \perp EF \end{cases} \Rightarrow SN \perp mp(MEF)$

Kết luận: $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ □

Bài 7.29.
Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AD = 4a$, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{6}$. Tìm côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) khi thể tích $S.ABCD$ lớn nhất.

Giải:



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Do $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{6}$ nên suy ra $SO \perp mp(ABCD)$.
Từ $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{6}$ và $SO \perp mp(ABCD)$, suy ra $OA = OB = OC = OD \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

Giả sử $AB = b$, khi đó $BD = \sqrt{16a^2 + b^2} \Rightarrow OA = \dfrac{\sqrt{16a^2+b^2}}{2}$.

Do vậy: $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 6a^2 - \dfrac{16a^2+b^2}{4} = \dfrac{8a^2-b^2}{4} \Rightarrow SI = \dfrac{\sqrt{8a^2-b^2}}{4}$.

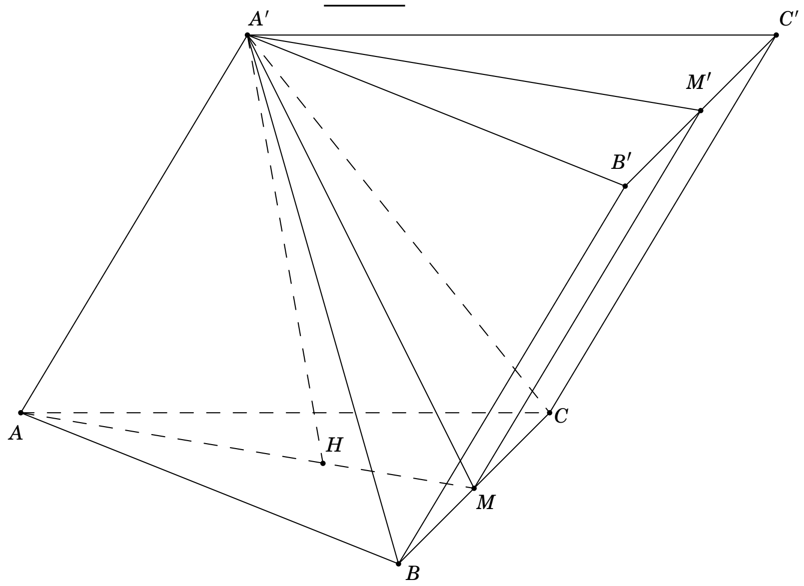
Từ đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.AB.AD.SO = \dfrac{2}{3}.2a.b.\sqrt{8a^2-b^2} \le \dfrac{2}{3}.a.(b^2+8a^2-b^2) = \dfrac{16a^3}{3}$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi $b = 2a$.
Vậy thể tích $S.ABCD$ lớn nhất khi $AB = 2a$, khi đó $SO = a$.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $O(0;0;0);S(0;0;a);B(2a;a;0);C(-2a;a;0);D(-2a-a;0)$.
Ta có: $\overrightarrow{SB}(2a;a;-a)$, $\overrightarrow{SC}(-2a;a;-a)$, $\overrightarrow{SD}(-2a;-a;-a)$
$\left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{SC}\right] = (0;4a^2;4a^2)$, $\left[\overrightarrow{SC};\overrightarrow{SD}\right] = (-2a^2;0;4a^2)$
Từ đó ta tìm được vectơ pháp tuyến của $mp(SBC)$ là $\overrightarrow{n}(0;1;1)$, vectơ pháp tuyến của $mp(SCD)$ là $\overrightarrow{n}(1;0;-2)$. Góc φ giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là:

$$\cos\varphi = \frac{|1.0+0.1+(-2).1|}{\sqrt{0+1+1}.\sqrt{1+0+(-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

Kết luận: $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$ □

Bài 7.30.
Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Điểm A' cách đều ba điểm A, B, C; cạnh bên AA' tạo với mặt đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ và chứng minh mặt bên $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

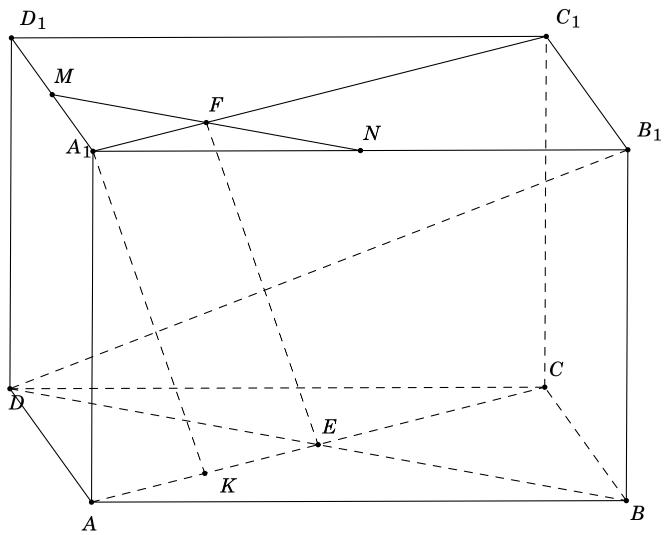
Giải:



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, do tam giác ABC đều và $A'A = A'B = A'C$
nên $A'H \perp mp(ABC)$. Do đó: $(\widehat{AA';mp(ABC)}) = \widehat{A'AH} = 60^o$.
Nên: $A'H = AH \tan\widehat{A'AH} = \dfrac{2}{3}.AM.\tan 60^o = a$
Từ đó, ta có:$V_{ABC.A'B'C'} = dt(\triangle ABC).A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$
Gọi M, M' lần lượt là trung điểm BC, $B'C'$, khi đó $MM' \parallel BB' \parallel AA'$.
Tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$. $A'H \perp mp(ABC) \Rightarrow A'H \perp BC$.
Từ $\begin{cases} AM \perp BC \\ A'H \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp BB'$. Nên $BCC'B'$ là hình chữ nhật. □

Bài 7.31.
Cho hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có các cạnh $AB = AD = 2$, $AA_1 = \sqrt{3}$ và góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh A_1D_1 và A_1B_1.
1. *Chứng minh rằng AC_1 vuông góc với mặt phẳng $(BDMN)$.*
2. *Tính thể tích khối chóp $A.BDMN$*

Giải:



1. Do hình bình hành $ABCD$ có $AB = AD = 2$ và góc $\widehat{BAD} = 60^0$ nên $ABCD$ là hình thoi và $BD = 2$, $BD \perp AC$.

Từ $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA_1 \end{cases}$ suy ra $BD \perp AC_1$ (1).

Ta có: $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{AC_1} = \left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AA_1}^2 = \frac{1}{2}.2.2.\cos 60^0 + \frac{1}{2}.2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 0$

Suy ra $AC_1 \perp MD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AC_1 \perp mp(BDMN)$.

2. Gọi E là giao điểm của AC và BD, F là giao điểm của A_1C_1 và MN.

Do $BD \perp mp(ACC_1A_1)$ nên $BD \perp EF$, $MN \perp EF$.

Kẻ $A_1K \parallel EI$ (K thuộc AC) thì K là trung điểm AE

Gọi I là giao điểm của A_1K và AC_1; H là giao điểm của AC_1 và EF, thì I là trung điểm của AH.

Trong tam giác A_1AK vuông tại K, ta có:

$$A_1K^2 = A_1A^2 + AK^2 = A_1A^2 + \left(\frac{AE}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{15}{4}$$

Suy ra $EF = A_1K = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

Từ đó $dt(BDMN) = \dfrac{1}{2}(BD + MN).EF = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$.

Mặt khác $AI = \dfrac{AA_1.AK}{A_1K} = \dfrac{3}{\sqrt{15}}$

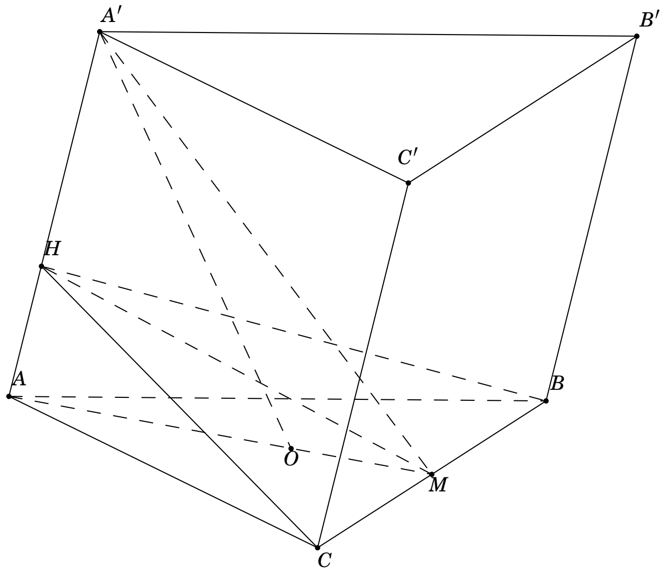
Nên $AH = 2AI = \dfrac{6}{\sqrt{15}}$

Vậy $V_{A.BDMN} = \dfrac{1}{3}dt(BDMN).AH = \dfrac{3}{2}$ □

Bài 7.32.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của tam giác ABC. Một mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA', cắt lăng trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Giải:



Do tam giác ABC đều và hình chiếu của A' trùng với tâm O của tam giác ABC nên suy ra $A'A = A'B = A'C$.

Gọi M là trung điểm BC, H là hình chiếu của M trên AA', khi đó $mp(BCH) \perp AA'$, suy ra $mp(P)$ chính là $mp(BCH)$.

Vì hình chóp $A'.ABC$ là hình chóp đều nên $\widehat{A'AM}$ nhọn, suy ra H nằm giữa AA'. $dt(\triangle BCH) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2}BC.HM \Longrightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$AH = \sqrt{AM^2 - HM^2} = \frac{3a}{4}$

Vì tam giác ABC đều cạnh a nên $OA = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Ta có $\triangle MHA \backsim \triangle A'OA$ nên

$\frac{HM}{OA'} = \frac{AH}{OA} \Longrightarrow OA' = \frac{HM.OA}{AH} = \frac{a}{3}$

Vậy: $V_{ABC.A'B'C'} = dt(\triangle ABC).A'O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ □

Bài 7.33.

Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có độ dài cạnh bằng a. Trên các cạnh AB và CD lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $BM = CN = x$. Xác định vị trí điểm M sao cho khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1C và MN bằng $\frac{a}{3}$.

Giải:

Do $MN \parallel BC$ nên $MN \parallel mp(A_1BC)$.

Kẻ $MK \perp A_1B$ với K nằm trên A_1B, $\Rightarrow MK \perp mp(A_1BC)$.

Bởi vậy:

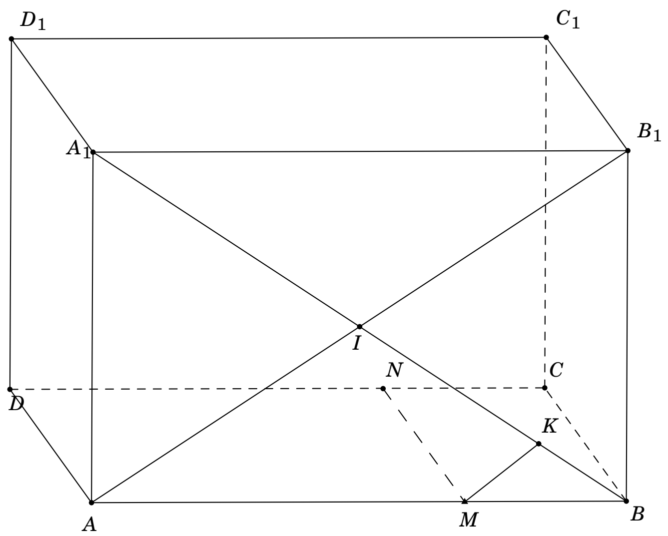
$$d(A_1C;MN) = d(MN;mp(A_1BC)) = d(M;mp(A_1BC)) = MK$$

Gọi I là giao điểm của AB_1 với A_1B, thì $MK \parallel A_1I$ và:

$$MK = AI.\frac{BM}{AB} = a\sqrt{2}.\frac{x}{a} = x\sqrt{2}$$

Vì thế $d(A_1C;MN) = \frac{a}{3} \iff x\sqrt{2} = \frac{a}{3} \iff x = \frac{a\sqrt{2}}{6}$

Hay $BM = \frac{a\sqrt{2}}{6}$



□

Bài 7.34.
Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1. Chứng minh $MB \perp MA_1$ và tính khoảng cách d từ điểm A tới $mp(A_1BM)$.

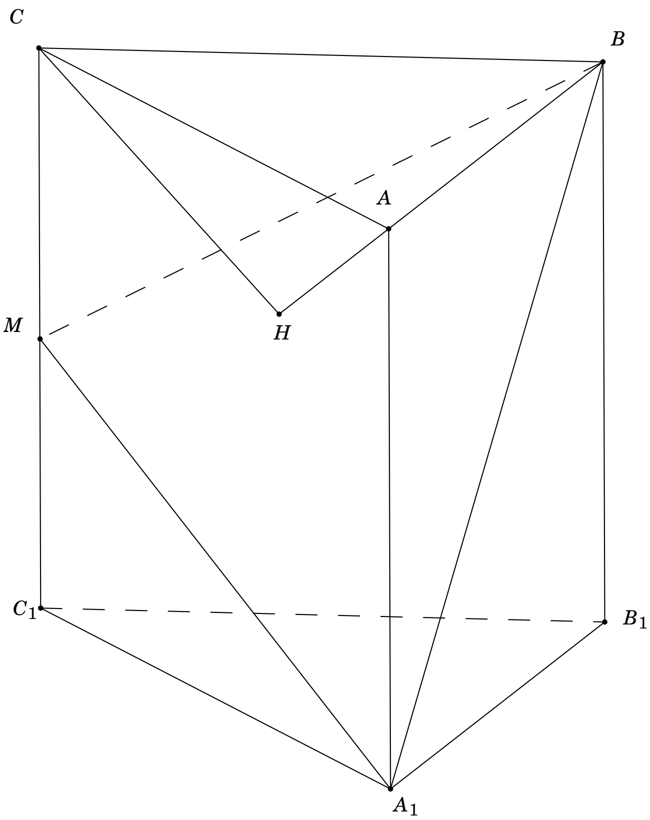
Giải:

Ta có: $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA_1} = (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{C_1A_1}) = -\overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = -(a\sqrt{5})^2 + a^2 + (2a)^2 = 0$
$\Rightarrow MB \perp MA_1$

Kẻ $CH \perp AB$ tại H thì $CH \perp mp(ABA_1)$
$\Rightarrow d(M;mp(ABA_1)) = CH = AC.\sin\widehat{HAC} = a\sqrt{3}$
$dt(\triangle ABA_1) = \frac{1}{2}.AB.AA_1 = \frac{1}{2}.a.2a\sqrt{5} = a^2\sqrt{5}$ Bởi vậy: $V_{ABA_1M} = \frac{1}{3}dt(\triangle ABA_1).d(M;mp(ABA_1)) = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Ta có: $MB = \sqrt{MC^2 + BC^2} = \sqrt{MC^2 + AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos\widehat{BAC}} = a\sqrt{12}$
$MA_1 = \sqrt{MC_1^2 + C_1A_1^2} = 3a$
$\Rightarrow dt(\triangle MA_1B) = \frac{1}{2}.MB.MA_1 = 3a^2\sqrt{3}$

Từ đó:$d(A;mp(A_1BM)) = \frac{3V_{ABA_1M}}{dt(\triangle MA_1B)} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$



□

Bài 7.35.
Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, điểm A_1 cách đều ba điểm A,B,C. Cạnh bên A_1A tạo với mặt đáy góc α. Hãy tìm α, biết thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ bằng $2\sqrt{3}a^3$.

Giải:

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do điểm A_1 cách đều ba điểm A,B,C và ABC là tam giác đều nên suy ra $A_1G \perp mp(ABC)$

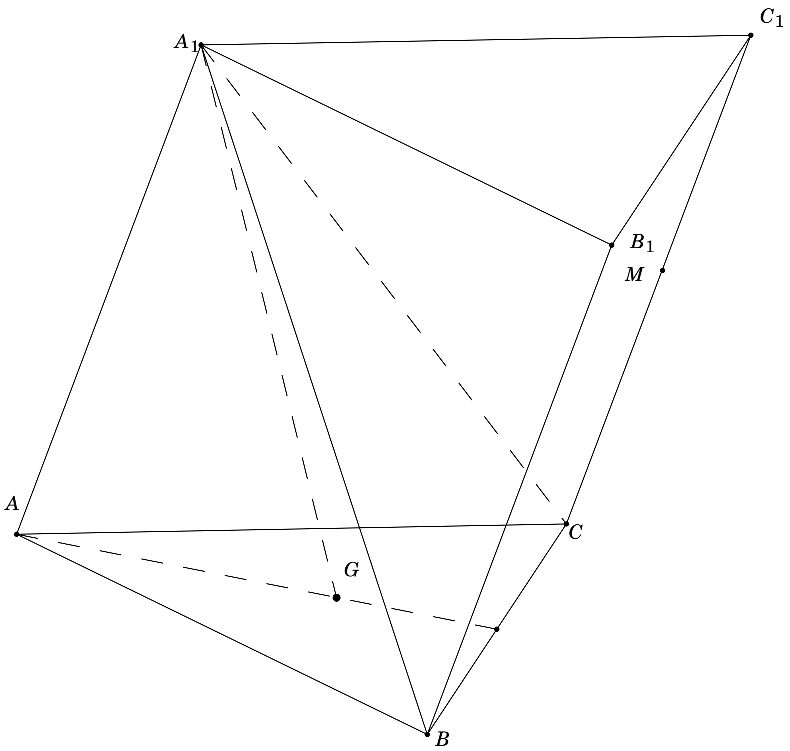
Bởi vậy: $(\widehat{A_1A;mp(ABC)}) = (\widehat{A_1A;AG}) = \widehat{A_1AG} = \alpha$

Ta có: $dt(\triangle ABC) = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$

$\Rightarrow A_1G = \dfrac{V_{ABC.A_1B_1C_1}}{dt(\triangle ABC)} = \dfrac{2\sqrt{3}a^3}{a^2\sqrt{3}} = 2a$

$AG = \dfrac{2}{3}\dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}3$

Trong tam giác vuông A_1GA, ta có: $\tan\widehat{A_1AG} = \dfrac{A_1G}{AG} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^0$



□

Bài 7.36.
Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có các cạnh $AA_1 = 3a$, $AB = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$ và góc $\widehat{BCA} = 60^0$. Gọi M là trung điểm cạnh BB_1, N là trung điểm cạnh A_1B_1, G là trọng tâm tam giác BB_1C_1. Hãy tính thể tích khối tứ diện $AMNG$.

Giải:

Ta có: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos\widehat{BCA} \iff BC^2 - 2a.BC + a^2 = 0 \iff BC = a$

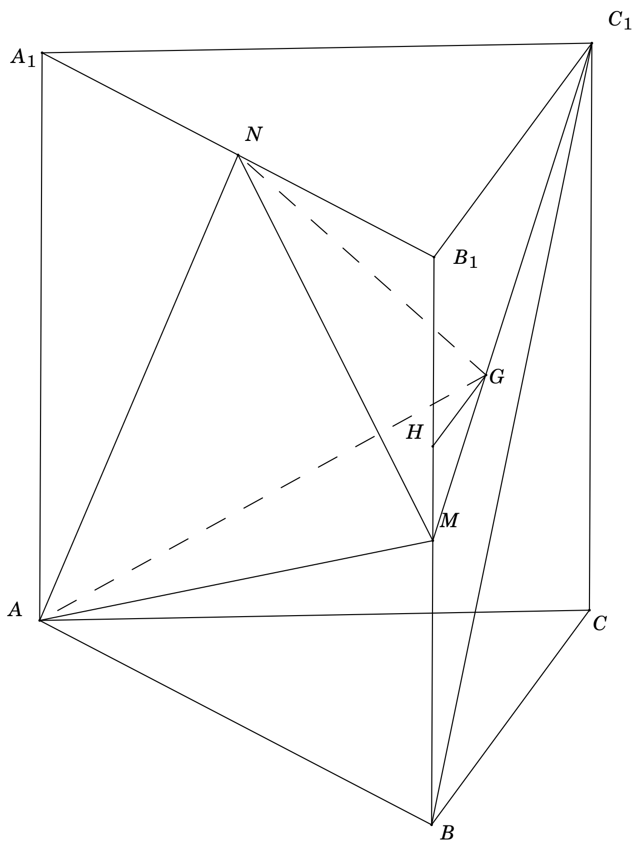
Tam giác ABC có $AC^2 = AB^2 + BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại $B \Rightarrow C_1B_1 \perp mp(ABB_1A_1)$

Kẻ $GH \perp BB_1$ (với H nằm trên cạnh BB_1), khi đó $GH \parallel C_1B_1$.

Bởi vậy: $GH \perp mp(ABB_1A_1)$ và $GH = \dfrac{a}{3}$.

$dt(\triangle AMN) = dt(ABB_1A_1) - dt(AA_1N) - dt(B_1NM) - dt(ABM) = 3a.a\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}.3a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}.\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}.a\sqrt{3}.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}a^2}{8}$

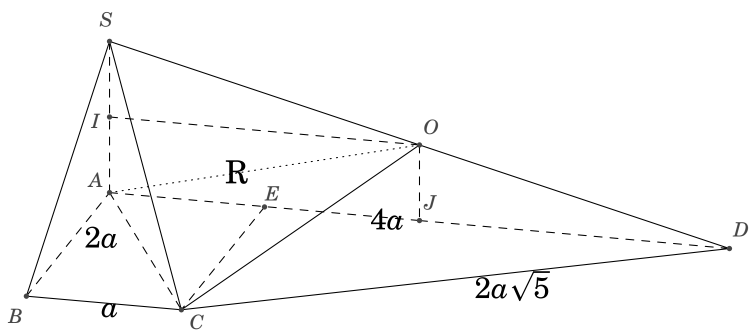
Vậy: $V_{AMNG} = \dfrac{1}{3}dt(\triangle AMN).GH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{9\sqrt{3}a^2}{8}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$



□

Bài 7.37.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A,B. Hai mặt phẳng $(SAB),(SAD)$ cùng vuông góc với đáy. Biết $AB = 2a, SA = BC = a, CD = 2a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SACD$.

Giải:



Qua C kẻ đường thẳng song song với AB cắt AD tại E,
suy ra tứ giác $ABCE$ là hình chữ nhật nên $AE = a$ và $\triangle CED$ vuông tại E.
Theo định lí Pitago ta có:

$$DE^2 = CD^2 - CE^2 = 20a^2 - 4a^2 = 16a^2 \Rightarrow DE = 4a.$$

Vậy AD là đáy lớn của hình thang và $AE = a + 4a = 5a$.
Diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = \dfrac{(BC+AD)AB}{2} = \dfrac{(a+5a).2a}{2} = 6a^2$(đvdt).

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là : $V=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=2a^3$.

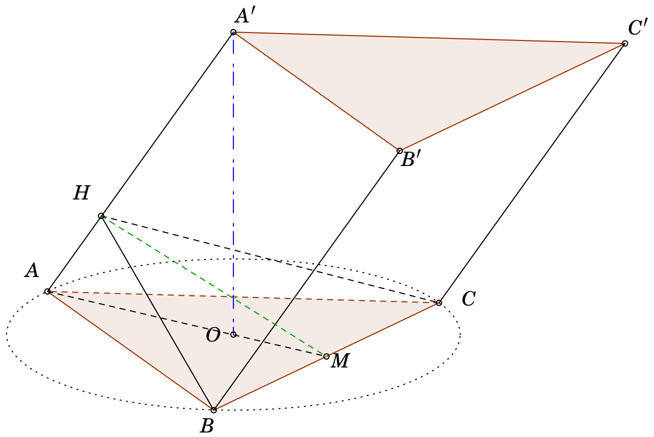
Tam giác ACD vuông ở C, trong mp(SAD) gọi O là giao của đường thẳng vuông góc với SA tại trung điểm I của SA và đường thẳng vuông góc với AD tại trung điểm J của AD suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SACD$ (O là trung điểm của SD),

suy ra: $R=OA=\sqrt{OI^2+AI^2}=a\frac{\sqrt{26}}{2}$. □

Bài 7.38.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, đỉnh A' cách đều các điểm A,B,C. Mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA' cắt lăng trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Giải:



Do $A'A=A'B=A'C$ nên hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trọng tâm O của tam giác ABC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AA', Khi đó $(P)\equiv(BCH)$.

Gọi M là trung điểm của BC thì $MH\perp AA'$ và $\widehat{A'AM}$ nhọn H nằm giữa AA'. Thiết diện của lăng trụ khi cắt bởi (P) là tam giác BCH.

$\triangle ABC$ đều cạnh a nên $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}, AO=\frac{2}{3}AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $HB=HC=\sqrt{a^2+AH^2}\Rightarrow HM\perp BC$

Theo bài ra: $S_{BCH}=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\Rightarrow\frac{1}{2}HM.BC=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\Rightarrow HM=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$AH=\sqrt{AM^2-HM^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{3a^2}{16}}=\frac{3a}{4}$$

Hai tam giác $A'AO$ và MAH đồng dạng $\frac{A'O}{AO}=\frac{HM}{AH}$

Suy ra $$A'O=\frac{AO.HM}{AH}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\frac{a\sqrt{3}}{4}\frac{4}{3a}=\frac{a}{3}.$$

Thể tích khối lăng trụ : $V=A'O.S_{ABC}=\frac{1}{2}A'O.AM.BC=\frac{1}{2}\frac{a}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}a=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (đvtt) □

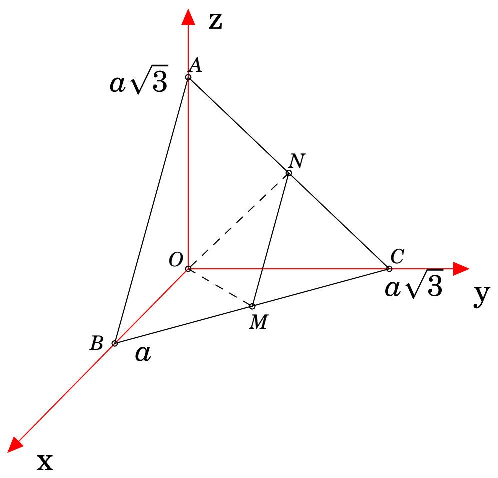
Bài 7.39.

Cho hình chóp $OABC$ có 3 cạnh OA,OB,OC vuông góc với nhau đôi một tại O, $OB=a, OC=OA=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

a. *Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC).*

b. *Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và OM.*

Giải:



Trong tam giác OBC, vẽ đường cao OK. Trong tam giác OAK, vẽ đường cao OH. Chứng minh OH vuông góc mp (ABC).

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{5}{a^2}.$$

Suy ra $$d(O,(ABC))=OH=\frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó $O(0;0;0), A(0;0;a\sqrt{3})$; $B(a;0;0)$, $C(0;a\sqrt{3};0)$,

$$M\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), N\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{OM}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), \overrightarrow{ON}=\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right]=\left(\frac{3a^2}{4};\frac{a^2\sqrt{3}}{4};\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)\ \vec{n}=(\sqrt{3};1;1) \text{ là VTPT của mp}(OMN)$$

Phương trình mặt phẳng (OMN) qua O với vectơ pháp tuyến $\vec{n}$: $\sqrt{3}x+y+z=0$

Ta có: $d(B;(OMN))=\dfrac{\left|\sqrt{3}.a+0+0\right|}{\sqrt{3+1+1}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Vậy: $d(B;(NOM))=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow AB\|MN \Rightarrow AB\|(OMN)$

$$\Rightarrow d(AB;OM)=d(AB;(OMN))=d(B;(NOM))=\frac{a\sqrt{15}}{5}.$$ □

Bài 7.40.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A,B với $AB=BC=a;AD=2a$. Các mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp và khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB.

Giải:

Gọi $H=AC\cap BD \Rightarrow SH\perp(ABCD)\&BH=\dfrac{1}{3}BD$

Kẻ $HE\perp AB \Rightarrow AB\perp(SHE) \Rightarrow g((SAB);(ABCD))=\widehat{SEH}=60^o$.

Mà $HE=\dfrac{1}{3}AD=\dfrac{2a}{3} \Rightarrow SH=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V_{SABCD}=\dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Gọi O là trung điểm $AD \Rightarrow ABCO$ là hv cạnh $a \Rightarrow \triangle ACD$ có trung tuyến $CO=\dfrac{1}{2}AD$

$CD\perp AC \Rightarrow CD\perp(SAC)$ và $BO\|CD$ hay $CD\|(SBO)\&BO\perp(SAC)$.

$d(CD;SB)=d(CD;(SBO))=d(C;(SBO))$.

Tính chất trọng tâm tam giác $BCO \Rightarrow IH=\dfrac{1}{3}IC=\dfrac{a\sqrt{2}}{6} \Rightarrow IS=\sqrt{IH^2+HS^2}=\dfrac{5a\sqrt{2}}{6}$

kẻ $CK\perp SI$ mà $CK\perp BO \Rightarrow CK\perp(SBO) \Rightarrow d(C;(SBO))=CK$

Trong tam giác SIC có : $S_{SIC}=\dfrac{1}{2}SH.IC=\dfrac{1}{2}SI.CK \Rightarrow CK=\dfrac{SH.IC}{SI}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$

Vậy $d(CD;SB)=\dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$ □

Bài 7.41.
Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn $AB=2$, tam giác ACB vuông tại C, các tam giác SAC và SBD là các tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{3}$. Tính thể tích của hình chóp $S.ABCD$.

Giải:

Vì tam giác SAC và SBD đều cạnh $\sqrt{3}$ nên $AC=BD$ hay tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.
Lại có góc ACB vuông nên hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB.
Gọi H là trung điểm AB khi đó SH vuông góc $(ABCD)$ hay SH là đường cao của hình chóp.
Ta có $BC=\sqrt{4-3}=1$ nên $SH=\sqrt{SB^2-HB^2}=\sqrt{2}$.
Lại có $S_{ABCD}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ (Do $ABCD$ là nửa lục giác đều)
Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3\sqrt{3}}{4}.\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ (đvtt). □

Bài 7.42.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AD=a\sqrt{2}, CD=2a, SA\perp(ABCD)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Gọi M là trung điểm của CD, N là giao điểm của BM và AC. Tính thể tích khối chóp $S.ABM$. Chứng minh các điểm S,A,D,M,N thuộc một mặt cầu.

Giải:

Kết luận: □

Bài 7.43.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A,B, $AB=BC=a; AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA=a$. Gọi E là trung điểm của AD. Tính thể tích khối chóp $S.CDE$ và tìm tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CDE$.

Giải:

Dễ dàng tính được $V=\dfrac{a^3}{6}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SE và SC
ta có mặt phẳng $(ABNM)$ là mặt phẳng trung trực của SE.
Vậy tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SCDE$ là giao điểm của mặt phẳng $(ABMN)$ và trục đường tròn ngoại tiếp đáy CDE.
Gọi Δ là đường thẳng qua I là trung điểm của CD và song song với SA. Gọi K là trung điểm của AB thì $KN \parallel AM$. KN và Δ đồng phẳng suy ra $KN\cap\Delta=O$ là điểm cần tìm.
Tam giác OIK vuông cân nên $OI=IK=\dfrac{BC+AD}{2}=\dfrac{3a}{2}$; $CD=a\sqrt{2}; IC=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Ta có $OC^2=OI^2+IC^2=\dfrac{9a^2}{4}+\dfrac{2a^2}{4}=\dfrac{11a^2}{4}\Rightarrow R=OC=\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$. □

Bài 7.44.
Cho hình hộp đứng $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có $AB=AD=a; AA_1=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}(a>0); \widehat{BAD}=60^o$. M, N lần lượt là trung điểm của A_1D_1 và A_1B_1.
a. *Chứng minh: $AC_1\perp(BDMN)$*
b. *Tính thể tích khối chóp $A.BDMN$.*

Giải:

Kết luận: □

Bài 7.45.
Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có góc BAD bằng 45^o. Các đường chéo AC' và DB' lần lượt tạo với mặt phẳng chứa đáy các góc 45^o và 60^o. Biết $AA' = 2a$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đã cho.

Giải:

Kết luận: □

Bài 7.46.
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm BC, mặt phẳng (SAC) tạo với đáy (ABC) một góc 60^o. Tính thể tích hình chóp và khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAC) theo a, với I là trung điểm SB.

Giải:

Gọi H, J lần lượt là trung điểm của BC, AC, Ta có $\left.\begin{matrix} SH\perp(ABC) \\ HJ\perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC\perp SJ$,

nên $\widehat{SJH} = 60^o$. $AB = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$, $HJ = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$, $SH = HJ.\tan 60^o = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.\frac{AB.AC}{2} = \frac{1}{6}.\frac{\sqrt{6}}{2}.(\sqrt{2})^2.a^3 = \frac{\sqrt{6}a^3}{6}.$$

Gọi E là hình chiếu của H lên SJ, khi đó ta có $\left.\begin{matrix} HE\perp SJ \\ HE\perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow HE\perp(SAC)$.

Mặt khác, do $IH \parallel SC \Rightarrow IH \parallel (SAC)$,

nên $d(I,(SAC)) = d(H,(SAC)) = HE = HJ.\sin 60^o = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a$. □

Bài 7.47.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, hai đường chéo $AC = 2\sqrt{3}a, BD = 2a$ và cắt nhau tại O; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

Giải:

Kết luận: □

Bài 7.48.
Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a, BC = 2a, \widehat{ACB} = 120^o$ và đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)$góc 30^o. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B, CC'$ theo a.

Giải:

Trong (ABC), kẻ $CH\perp AB (H\in AB)$, suy ra $CH\perp\left(ABB'A'\right)$ nên $A'H$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên $(ABB'A')$.

Do đó: $[\widehat{A'C,(ABB'A')}] = (\widehat{A'C,A'H}) = \widehat{CA'H} = 30^0$. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AC.BC.\sin 120^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos 120^0 = 7a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{7}, CH = \dfrac{2.S_{\Delta ABC}}{AB} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Suy ra: $A'C = \dfrac{CH}{\sin 30^o} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. Xét tam giác vuông $AA'C$ ta được: $AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \dfrac{a\sqrt{35}}{7}$.

Suy ra: $V = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{a^3\sqrt{105}}{14}$. Do $CC'//AA' \Rightarrow CC'//(ABB'A')$.

Suy ra: $d(A'B, CC') = d(CC', (ABB'A')) = d(C, (ABB'A')) = CH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. □

Bài 7.49.
Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng trùng với tâm O của tam giác ABC. Một mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA', cắt lăng trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Giải:

Gọi M là trung điểm của BC, do $A'O \perp (ABC)$ nên $BC \perp (A'AM)$. Gọi K là điểm thuộc AA' sao cho $KB \perp AA'$, nối KC thì $AA' \perp (KBC) \Rightarrow AA' \perp KM AO = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;

KBC có diện tích $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$ nên $\dfrac{KM.BC}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow KM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Xét $A'AM$ có 2 đường cao $A'M$ và MK nên $A'O.AM = KM.AA'$ $(*)$:

đặt $A'O = x > 0$ khi đó từ $(*)$ ta có: $x.AM = AA'.KM \Leftrightarrow x.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{3}}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ (Do $A'AO$ vuông tại O và $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$) hay $2x = \sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{3}} \Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + \dfrac{a^2}{3} \Leftrightarrow 3x^2 = \dfrac{a^2}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{3}$.

Ta có diện tích đáy ABC bằng $\dfrac{1}{2}.a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (Diện tích tam giác đều cạnh a).

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'O.S_{ABC} = \dfrac{a}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. □

Bài 7.50.
Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh $AB = AD = 2, AA' = \sqrt{3}$, góc $\widehat{BAD} = 60^o$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, AB. Chứng minh $A'C$ vuông góc với mặt phẳng $(B'D'MN)$. Tính thể tích khối chóp $A'B'D'MN$.

Giải:

Giả sử $A'C$ cắt $O'J$ tại H (hình vẽ)$\Rightarrow H$ là giao điểm của $A'C$ với mp$(B'D'MN)$

Xét hình chữ nhật $ACC'A'$ có $A'C' = 2AA'A'O'OA$ là hình vuông.

Từ đó chứng minh được $A'I \perp O'J$ hay $A'C \perp O'J$ (4). Từ (3) và (4): $A'C \perp mp(B'D'MN)$ đpcm

Tứ giác $B'D'MN$ là hình thang cân có đường cao là $O'J$. Ta có: $B'N = \sqrt{B'B^2 + BN^2} = 2$

Tính được $O'J = \dfrac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow S_{B'D'MN} = \dfrac{1}{2}(B'D' + MN).O'J = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$ (5)

$\triangle A'O'I$ vuông tại O' có $A'O' = \sqrt{3}, O'I = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó tính được : $O'H^2 = \dfrac{3}{5} \Rightarrow A'H^2 = A'O'^2 - O'H^2 = 3 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{12}{5} \Rightarrow A'H = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

Từ đó: $V_{A'B'D'MN} = \dfrac{1}{3}A'H.S_{B'D'MN} = \dfrac{3}{2}$. □

Bài 7.51.
Cho khối chóp S.ABCD có đáy là hình thang cân, đáy lớn AB bằng bốn lần đáy nhỏ CD, chiều cao của đáy bằng a. Bốn đường cao của bốn mặt bên ứng với đỉnh S có độ dài bằng nhau và bằng b. Tính thể tích của khối chóp theo a, b.

Giải:

Gọi H là chân đường cao của chóp thì H phải cách đều các cạnh của đáy và trong trường hợp này ta chứng minh được H nằm trong đáy.
Suy ra hình thang cân $ABCD$ có đường tròn nội tiếp tâm H là trung điểm đoạn MN với M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB,CD và $MN=a$
Đường tròn đó tiếp xúc với BC tại E thì $HM=HN=HE=\frac{a}{2}$ là bán kính đường tròn
và $SE=SM=SN=b\left(b>\frac{a}{2}\right)\Rightarrow SH=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}$
Đặt $CN=x$ thì $BM=4x$, $CE=x$, $BE=4x$. Tam giác HBC vuông ở H
nên $HE^2=EB.EC\Leftrightarrow\frac{a^2}{4}=4x^2\Leftrightarrow x=\frac{a}{4}\Rightarrow CD=\frac{a}{2}$, $AB=2a$,suy ra $S_{ABCD}=\frac{5a^2}{4}$.
Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{5a^2}{4}.\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}=\frac{5a^2}{24}\sqrt{4b^2-a^2}$(đvtt) □

Bài 7.52.
Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B; $AB=BC=2a, AD=4a$. Cạnh $SA=4a$ vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SAvăSD. Tính thể tích khối chóp S.BCNM.

Giải:

Kẻ $SH\perp BM$. Vì $MN\parallel AD; AD\perp(SAB)$ nên $MN\perp(SAB)\Rightarrow MN\perp SH$.
Từ đó $SH\perp(BCNM)$. Vậy SH là đường cao hình chóp $S.BCNM$.
Kẻ $AK\perp BM$, suy ra $AK=SH$. Tam giác ABM vuông cân tại A
suy ra $AB=AM=2a\Rightarrow AK=SH=a\sqrt{2}$.
$BCNM$ là hình chữ nhật với diện tích: $S_{BCNM}=BC.BM=2a.2a\sqrt{2}=4a^2\sqrt{2}$.
Vậy : $V_{SBCNM}=\frac{1}{3}S_{BCNM}.SH=4a^2\sqrt{2}.a\sqrt{2}=8a^3$. □

Bài 7.53. *Huỳnh Bảo Toàn*
Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $\widehat{ABC}=60^o$. Mặt bên SBC là tam giác cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $BM=2MC$. Mặt phẳng (α) qua SM và song song với AB cắt SC tại N. Tính khoảng cách từ C tới mặt phẳng (α) và thể tích khối chóp S.BMN.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ có các điểm B,C,S lần lượt nằm trên các tia Ax,Ay,Az như hình vẽ.
Trong hệ trục này, ta có $A(0;0;0)$, $S(0;0;a)$ và đặt $B(t;0;0)$, với $t>0$.
Khi đó, $AC=AB\tan 60^o=t\sqrt{3}\Rightarrow C\left(0;t\sqrt{3};0\right),\overrightarrow{CB}=\left(t;-t\sqrt{3};0\right)$.
Do $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ nên $M\left(\frac{t}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}t;0\right)$.
$\triangle SBC$ cân tại C nên $CB=CS\Leftrightarrow\sqrt{t^2+\left(\sqrt{3}t\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}t\right)^2+a^2}\Leftrightarrow t=a$.
Mặt phẳng (α) qua SM và song song với AB cắt SC tại N nên MN song song với AB và $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,
suy ra $N\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{3}a;0\right)$. Ta có $\overrightarrow{SM}=\left(\frac{a}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}a;-a\right)$, $\overrightarrow{SN}=\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{3}a;-a\right)$,
$\left[\overrightarrow{SM};\overrightarrow{SN}\right]=\left(0;\frac{1}{3}a^2;\frac{2\sqrt{3}}{9}a^2\right)$, $\overrightarrow{SB}=(a;0;-a)$.

Phương trình (SMN) là $3y+2\sqrt{3}z-2\sqrt{3}a=0$.

Khoảng cách từ C tới (SMN) là $d(C,(SMN))=\dfrac{|3\sqrt{3}a-2\sqrt{3}a|}{\sqrt{3^2+(2\sqrt{3})^2}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Thể tích khối chóp $S.BMN$ là $V_{S.BMN}=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{SB}.\left[\overrightarrow{SM};\overrightarrow{SN}\right]\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{27}$ (đvtt). □

Bài 7.54. *Huỳnh Bảo Toàn*

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Trên các cạnh SB,BC và CS lần lượt lấy các điểm M,N và P sao cho $SM=\frac{2}{3}SB$, $BN=\frac{2}{3}BC$ và $CP=\frac{1}{3}CS$. Biết hình chóp $A.MNP$ có thể tích bằng $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{27}$. Hãy tính thể tích của hình chóp đã cho và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và NP.

Giải:

Đặt $AC=t>0$ và chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ.

Trong hệ trục này, $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;t;0)$, $S(0;0;a\sqrt{3})$.

Ngoài ra, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BS}=\left(\dfrac{2a}{3};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)$

nên $M\left(\dfrac{2a}{3};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)$, $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{a}{3};\dfrac{2t}{3};0\right)$

nên $N\left(\dfrac{a}{3};\dfrac{2t}{3};0\right)$, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CS}=\left(0;\dfrac{2t}{3};\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)$

nên $P\left(0;\dfrac{2t}{3};\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)$. $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]=\left(-\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{9};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{9};\dfrac{4at}{9}\right)$ và $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right].\overrightarrow{AP}=\dfrac{2a^2t\sqrt{3}}{9}$.

Thể tích khối chóp $A.MNP$ là $V_{A.MNP}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right].\overrightarrow{AP}\right|=\dfrac{a^2t\sqrt{3}}{27}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{27}\Leftrightarrow t=a\sqrt{2}$.

Ta dễ dàng tính được thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$ (đvtt).

Bây giờ, ta sẽ tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và NP.

Ta có $\overrightarrow{NP}=\left(-\dfrac{a}{3};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{NP}\right]=\left(0;-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3};0\right)$, $\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{NP}\right].\overrightarrow{AN}=-\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{9}$.

Khoảng cách cần tính $d(SA,NP)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{NP}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{NP}\right]\right|}=\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. □

Bài 7.55. *Huỳnh Bảo Toàn*

Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên tạo với đáy một góc 60^o và khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{6a\sqrt{13}}{13}$. Tính thể tích khối chóp đã cho và cosin của góc tạo bởi hai mặt bên.

Giải:

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC,M là trung điểm của BC.

Chọn hệ trục tọa độ vuông góc $Mxyz$ như hình vẽ. Gọi t $(t>0)$ là độ dài của cạnh AB.

Ta có $M(0;0;0)$, $A\left(0;-\dfrac{t\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B\left(\dfrac{t}{2};0;0\right)$, $C\left(-\dfrac{t}{2};0;0\right)$ và $O\left(0;-\dfrac{t\sqrt{3}}{6};0\right)$.

Vì $SO\perp(ABC)$ nên góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng góc $\widehat{SAO}$.

Do đó $SO=AO.\tan 60^o=t$ nên $\overrightarrow{OS}=(0;0;t)$ và $\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OS}=\left(0;-\dfrac{t\sqrt{3}}{6};t\right)$

hay $S\left(0;-\frac{t\sqrt{3}}{6};t\right)$. Khi đó $\left[\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MS}\right]=\left(0;-\frac{t^2}{2};-\frac{t^2\sqrt{3}}{12}\right)$
nên phương trình mặt phẳng (SBC) là $6y+\sqrt{3}z=0$.
Vậy nên $d(A,(SBC))=\frac{3t\sqrt{3}}{\sqrt{39}}=\frac{6a\sqrt{13}}{13}\Leftrightarrow t=2a$.
Lúc này $\overrightarrow{SA}=\left(0;-\frac{2a\sqrt{3}}{3};-2a\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(a;\frac{a\sqrt{3}}{3};-2a\right)$, $\overrightarrow{SC}=\left(-a;\frac{a\sqrt{3}}{3};-2a\right)$,
$\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right]=\left(2\sqrt{3}a^2;-2a^2;\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC}\right]=\left(2\sqrt{3}a^2;2a^2;-\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}\right)$.
Thể tích khối chóp S.ABC là $V_{S.ABC}=\frac{1}{6}.\left|\overrightarrow{SB}.\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC}\right]\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$ (đvtt).
Gọi α là góc giữa (SAB) va (SAC) thì $\cos\alpha=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right]\right|.\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC}\right]\right|}=\frac{5}{13}$. □

Bài 7.56. *Huỳnh Bảo Toàn*
Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết khoảng cách giữa AC và SD bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Hãy tính thể tích của hình chóp đã cho và góc giữa hai đường thẳng AC và SD.

Giải:

Kết luận: □

Bài 7.57. *Huỳnh Bảo Toàn*
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Cạnh bên SC tạo với đáy một góc 45^o. Biết rằng khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và SD. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và AC.

Giải:

Kết luận: □

Bài 7.58. *Huỳnh Bảo Toàn*
Cho hình chóp đều S.ABCD có diện tích mặt bên bằng $a^2\sqrt{3}$, cạnh bên hợp với đáy một góc 45^o. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tính thể tích của khối chóp S.MND, từ đó suy ra khoảng cách từ điểm D tới mặt phẳng(SMN).

Giải:

Kết luận: □

Bài 7.59. *Huỳnh Bảo Toàn*
Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB=a$. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC, cạnh bên AA' tạo với đáy một góc 60^0 và $A'C=2a$.
a. *Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.*
b. *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'C$.*

Giải:

Kết luận: □

Bài 7.60. *Huỳnh Bảo Toàn*

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M là trung điểm của cạnh AB và N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AN = 2CN$, E là giao của BN và CM. Đường thẳng đi qua E, song song với BC cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại P và Q. Tính thể tích khối chóp $A'.B'PQ$, và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'P$ và $C'Q$.

Giải:

Kết luận: □

8 - Một số bài tập tổng hợp

Bài 8.1. *Diễn đàn onluyentoan.vn*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. H là trung điểm AB. Hai mặt phẳng $(SHD),(SHC)$ cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$, biết khối chóp có ba mặt bên là ba tam giác vuông.

ĐS: $V = \frac{a^3}{6}$đvtt

Bài 8.2. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là giao điểm của AC' với mp$(A'BD)$.
Tính tỉ số $k = \frac{V_{G.CB'D'}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}$.

ĐS: $k = \frac{1}{6}$

Bài 8.3. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

ĐS: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$

Bài 8.4. *Diễn đàn onluyentoan.vn*

Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể tích của khối tứ diện $OO'AB$.

ĐS: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Bài 8.5. *Diễn đàn onluyentoan.vn*

Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp $A.BCNM$.

ĐS: $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{50}$

Bài 8.6. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB,BC,CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện $CMNP$.

ĐS: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}$

Bài 8.7. *Diễn đàn onluyentoan.vn*

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

ĐS: $\dfrac{HQ}{2}$

Bài 8.8. *Diễn đàn onluyentoan.vn*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, góc $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^o, BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

ĐS: $d(H;(SCD)) = \dfrac{a}{3}$

Bài 8.9. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $AA', B'C'$.

ĐS: $\varphi = \widehat{B'BH}, \quad \cos\varphi = \dfrac{1}{4}$

Bài 8.10. *Diễn đàn onluyentoan.vn*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a, SA = a, SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM,DN.

ĐS: $\varphi = \widehat{SME}, \quad \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Bài 8.11. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên độ dài bằng $a\sqrt{5}$, các mặt bên cùng tạo với mặt đáy một góc 60^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và bán kính mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp $S.ABCD$ theo a.

ĐS: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Bài 8.12. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Biết $\triangle ABC$ vuông tại B. $AB = a; BC = b; AA' = c(a^2 + b^2 < c^2)$. Gọi (P) là phẳng đi qua A và vuông góc với $A'C$. Xác định thiết diện của lăng trụ khi bị cắt bởi phẳng (P). Tính diện tích thiết diện theo a, b, c.

ĐS: $S = \dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2c}$

Bài 8.13. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho lăng trụ đứng tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao là a. Dựng thiết diện của lăng trụ tạo bởi mặt phẳng đi qua B' và vuông góc với cạnh $A'C$. Tính diện tích của thiết diện.

ĐS: $S = \dfrac{3\sqrt{15}}{8}a^2$

Bài 8.14. *Diễn đàn onluyentoan.vn*

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của tam giác ABC. Một mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA' cắt lăng trụ theo 1 thiết diện có diện tích $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$ Tính thể tích khối lăng trụ.

ĐS: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Bài 8.15. *Diễn đàn onluyentoan.vn*

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $2a$, cạnh bên $AA' = 3a$, Q, I lần lượt là trung điểm các đường thẳng DD', OB. mặt phẳng α qua IQ song song với AC chia hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích 2 phần đó.

ĐS: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{25}{119}$

Bài 8.16. *Diễn đàn onluyentoan.vn*

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông với $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$. M là điểm trên cạnh AA' sao cho $AA' = 3AM$. Tính thể tích của khối tứ diện $MB'BC'$. Tính khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(C'BM)$.

ĐS: $d(B', (BC'M)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài 8.17. *Diễn đàn onluyentoan.vn*

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'A = A'B$, đáy ABC là một tam giác vuông tại B, $BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$. Mặt bên $(ACC'A')$ vuông góc với đáy, góc tạo bởi mặt phẳng $(A'BC)$ và $(ACC'A')$ là α sao cho $\tan\alpha = 2$. Tính thể tích của khối chóp $A'.BCC'B'$ và khoảng cách giữa $A'B$ và $B'C$ theo a.

ĐS: $d(A'B; B'C) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài 8.18. *Diễn đàn onluyentoan.vn*

Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại $B, \widehat{BAC} = 30^o$, cạnh AC bằng $2a$. Cạnh bên AA' tạo với đáy một góc 60^o và chân đường vuông góc hạ từ A' xuống mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AA'

ĐS: $a\sqrt{3}$

Bài 8.19. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Góc giữa đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (ABC) bằng 60^o. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

ĐS: $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Bài 8.20. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình nón đỉnh S nội tiếp trong mặt cầu tâm O bán kính R và đáy là đường tròn giao tuyến của mặt cầu đó với một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng OS tại H sao cho $SH = x (0 < x < 2R)$. Tính theo R và x thể tích V và diện tích xung quanh S của hình nón đó; từ đó tìm một hệ thức liên hệ giữa ba đại lượng V, S và R.

ĐS: $\dfrac{S^2}{V} = 6\pi R$

Bài 8.21. *Diễn đàn onluyentoan.vn*

Cho lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân có đáy lớn $AD = a\sqrt{2}$. Biết góc hợp bởi BC' và $(ABCD)$ bằng 60^o, góc hợp bởi $A'D$ với $(ABCD)$ là φ sao cho $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $CD \perp (ABB'A')$, $A'B' \perp (CDD'C')$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và CD'.

ĐS: $V = \dfrac{3\sqrt{6}a^3}{16}$. $d((AB'),(CD')) = \dfrac{3\sqrt{78}a}{26}$

Bài 8.22. *Toán học tuổi trẻ số 400*

Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}, DA = DB = DC$. Biết rằng DBC là tam giác vuông. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

ĐS: $V = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a^3$

Bài 8.23. *Toán học tuổi trẻ số 401*

Tính thể tích khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy bằng a và khoảng cách giữa cạnh bên và cạnh đối diện bằng m.

ĐS: $V = \dfrac{a^3m}{6\sqrt{3a^2 - 4m^2}}$ $\left(\text{ĐK } m < \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Bài 8.24. *Toán học tuổi trẻ số 402*

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. S là điểm bất kì nằm trên đường thẳng At vuông góc với mặt phẳng (P) tại A. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ khi $SA = 2a$.

ĐS: $V = \pi a^3\sqrt{6}$

Bài 8.25. *Toán học tuổi trẻ số 403*

Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông, đường cao SA. Gọi M là trung điểm SC; N,P lần lượt nằm trên SB và SD sao cho $\dfrac{SN}{SB} = \dfrac{SP}{SD} = \dfrac{2}{3}$*. Mặt phẳng (MNP) chia hình chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.*

ĐS: $\dfrac{1}{2}$

Bài 8.26. *Toán học tuổi trẻ số 404*

Cho hình chóp S.ABC có $AB = BC = a; \widehat{ABC} = 90^o$*;* $SA \perp (ABC)$*; số đo góc nhị diện cạnh SC là* 60^o*. Kẻ* $AM \perp SB, AN \perp SC$*. Tính thể tích của hình chóp S.AMN*

ĐS: $V = \dfrac{a^3}{36}$

Bài 8.27. *Toán học tuổi trẻ số 405*

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = a$ $\widehat{ABC} = 30^o$*. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với đáy một góc* 60^o*. Biết rằng hình chiếu của đỉnh S trên mặt đáy thuộc cạnh BC. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.*

ĐS: $V = \dfrac{(3-\sqrt{3})a^3}{32}$

Bài 8.28. *Toán học tuổi trẻ số 406*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy . Biết $AB = 2a, SA = BC = a, CD = 2a\sqrt{5}$*. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SACD.*

ĐS: $V = 2a^3, R = \dfrac{a\sqrt{26}}{2}$

Bài 8.29. *Toán học tuổi trẻ số 408*

Cho hình chóp tam giác đều có góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60^o*. Khoảng cách giữa mặt bên và đỉnh đối diện bằng 6. Hãy tính thể tích hình chóp.*

ĐS: $V = \dfrac{26\sqrt{39}}{3}$

Bài 8.30. *Toán học tuổi trẻ số 412*

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, có đáy ABCD là hình bình hành, $AD = 4a$*, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng* $a\sqrt{6}$*. Tìm cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) khi thể tích của khối chóp S.ABCD lớn nhất.*

ĐS: $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$

Bài 8.31. *Toán học tuổi trẻ số 413*

Cho hình chóp S.ABC có $SA = 3a$ *(với* $a > 0$*); SA tạo với đáy (ABC) một góc* 60^o*. Tam giác ABC vuông tại B,* $\widehat{ACB} = 30^o$*. G là trọng tâm của tam giác ABC. Hai mặt phẳng (SGB) và (SGC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính thể tích hình chóp S.ABC theo a.*

ĐS: $V = \dfrac{243}{112}a^3$

Bài 8.32. *Toán học tuổi trẻ số 414*

Cho hình trụ với đáy là hai đường tròn $(O;R);(O';R')$; có chiều cao $OO' = \dfrac{2R}{3}$ và đường sinh AB. Tính thể tích tứ diện đều $ABCD$ biết rằng C,D nằm trên mặt trụ.

ĐS: $V = \dfrac{2R^3}{81}(3+2\sqrt{2})$

Bài 8.33. *Toán học tuổi trẻ số 415*

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. M và N là hai điểm lần lượt thuộc cạnh AB và AD sao cho $AM = \dfrac{2}{3}AB; AN = \dfrac{3}{4}AD$. E và F là hai điểm lần lượt thuộc cạnh $B'N$ và $A'M$ sao cho $EF \parallel AC$. Hãy xác định tỉ số $\dfrac{EB'}{NB'}$.

ĐS: $\dfrac{EB'}{NB'} = \dfrac{12}{29}$.

Bài 8.34. *Toán học tuổi trẻ số 416*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 120^o$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi C' là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng (α) đi qua AC' và song song với BD cắt các cạnh SB,SD lần lượt B',D'. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

ĐS: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$

Bài 8.35. *Toán học tuổi trẻ số 417*

Cho hình cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và các cạnh còn lại đều bằng a. Tính thể tích hình cầu đó.

ĐS: $V = \dfrac{13\sqrt{13}}{162}\pi a^3$

Bài 8.36. *Toán học tuổi trẻ số 418*

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Tính thể tích khối nón có đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và đỉnh của khối nón nằm trên mặt phẳng (SDC).

ĐS: $V = \dfrac{2\pi a^3}{27}$

Bài 8.37. *Toán học tuổi trẻ số 419*

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, đáy ABC là tam giác vuông có $CA = CB = a$, góc giữa đường thẳng BA_1 và mặt phẳng (ACC_1A_1) bằng 30^o. Gọi M là trung điểm cạnh A_1B_1. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (A_1BC).

ĐS: $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

Bài 8.38. *Toán học tuổi trẻ số 420*

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = a, AC = 2a$. Mặt bên (SBC) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 30^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB theo a.

ĐS: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}, d((SC),(AB)) = a$

Bài 8.39. *Đề dự bị I khối A-2006*

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = AD = a, AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc $(BAD) = 60^o$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D'$ và $A'B'$. Chứng minh AC' vuông góc với mặt phẳng $(BDMN)$. Tính thể tích khối chóp $A.BDMN$.

ĐS: $V = \dfrac{3a^3}{16}$

Bài 8.40. *Đề dự bị II khối B-2006*

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là hình chóp tam giác đều, cạnh đáy $AB = a$, cạnh bên $AA' = b$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$. Tính $\tan\alpha$ và thể tích khối chóp $A'BB'CC'$.

ĐS: $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}; V = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{6}$

Bài 8.41. *Dự bị 2 khối A-2006*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với đáy một góc 60^o. Trên SA lấy điểm M sao cho $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng mặt BCM cắt SD tại N. Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$.

ĐS: $V = \dfrac{10\sqrt{3}a^3}{27}$

Bài 8.42. *Đề dự bị 2 khối A-2007*

Cho hình chóp $S.ABC$ có góc $(\widehat{SBC, ABC}) = 60^o$, ABC là SBC là các tam giác đều cạnh a. Tính khoảng cách từ đỉnh B đến mặt phẳng (SAC).

ĐS: $\dfrac{3a}{\sqrt{13}}$

Bài 8.43. *Đề thi hsg tỉnh Bình Phước -2012*

Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và CD.

a. Dựng thiết diện tạo bởi mặt phẳng (A_1EF) và hình lập phương.

b. Tính thể tích hai phần của hình lập phương do mặt phẳng (A_1EF) cắt ra và tỉnh tỉ số thể tích hai phần đó.

ĐS: $V = \dfrac{47a^3}{72}$ & $V = \dfrac{25a^3}{72}$

Bài 8.44. *Đề thi hsg vòng tỉnh Bình Phước-2011*

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên OC lấy điểm N, trên $A'D'$ lấy điểm P sao cho $AM = CN = D'P = x \quad (0 \le x \le a)$.

a. Chứng minh rằng tam giác MNP đều. Tính diện tích tam giác MNP theo a và x. Tìm x để diện tích ấy nhỏ nhất.

b. Cho $x = \frac{a}{2}$, tính thể tích khối tứ diện B'MNP và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện này.

ĐS: a. $V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8} khi\ x = \frac{a}{2}$. b. $V = \frac{3a^3}{16}, R = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$

Bài 8.45. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi K là trung điểm SC. Mặt phẳng AK cắt SB,SD tại M,N. Đặt $V' = V_{SAMNK}$ và $V = V_{SABCD}$. Chứng minh: $\frac{1}{3} \le \frac{V'}{V} \le \frac{3}{8}$

HD: Dùng đạo hàm và bảng biến thiên để chứng minh

Bài 8.46. *Đề thi thử THPT Phan Bội Châu – Phú Yên*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi; hai đường chéo $AC = 2\sqrt{3}a; BD = 2a$ cắt nhau tại O; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích hình chóp S.ABCD theo a.

ĐS: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Bài 8.47. *Đề thi thử THPT Lê Lợi-Thanh Hóa*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, với $AB = 3a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và đáy bằng 60^o. Gọi M là trung điểm của CD. Tính thể tích khối chóp SABM và khoảng cách giữa 2 đường thẳng SB và AM.

ĐS: $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$

Bài 8.48. *Đề thi thử THPT Hồng Quang-Hải Dương*

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, biết $A'.ABC$ là hình chóp đều có cạnh đáy bằng a. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(BCC'B')$ bằng 90^o. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$ theo a.

ĐS: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$. Khoảng cách bằng $\frac{a}{2}$

Bài 8.49. *Đề thi thử THPT Minh Khai – Hà Tĩnh*

Cho hình trụ có đáy lần lượt là các đường tròn $(O), (O')$. Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm I của đoạn thẳng OO' tạo với đáy góc 60^o cắt đáy trên theo dây cung AB, cắt đáy dưới theo dây cung CD biết ABCD là hình vuông cạnh a. Tính diện tích toàn phần của hình trụ theo a.

ĐS: $S = \frac{2\pi\sqrt{5}a^2}{16}(2\sqrt{3} + \sqrt{5})$

Bài 8.50. *Đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo- Hưng Yên*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. Mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$,tam giác SAD vuông tại S và $\widehat{SAD} = 60^o$. Điểm M là trung điểm của cạnh SC. Tính thể tích của khối chóp $M.BCD$ và cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AC và DM.

ĐS: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}, \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{14}}{28}$

Bài 8.51. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết đường thẳng BD chia mặt phẳng $(ABCD)$ thành hai nữa mặt phẳng, hình chiếu của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ thuộc nữa mặt phẳng chứa điểm A. Cạnh bên SB vuông góc với BD và có độ dài là $2a\sqrt{2}$, mặt phẳng (SBD) tạo với mặt đáy góc 60^o. Tính thể tích hình chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC theo a.

ĐS: $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$, khoảng cách bằng $\dfrac{a\sqrt{14}}{7}$.

Bài 8.52. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,SC. Biết góc tạo bởi đường thẳng BM và ND bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

ĐS: $\dfrac{\sqrt{30}a^3}{18}$

Bài 8.53. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông $AB = BC = a$, mặt phẳng $(AB'C)$ tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ góc α sao cho $\tan\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Gọi M là trung điểm của BC.Tính thể tích khối chóp $MA'B'C$ và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $B'ACM$ theo a.

ĐS: $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$

Bài 8.54. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a đường chéo $BD = a\sqrt{3}$ Biết SA vuông góc BD, cạnh bên SB vuông góc AD và (SBD) tạo với mặt đáy góc 60^o. Tính thể tích hình chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB theo a.

ĐS: $V = \dfrac{3a^3}{4}$, K/cách bằng $\dfrac{3\sqrt{30}}{20}a$

Bài 8.55. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A,B. Biết $AB = BC = a; AD = 2a$,SAC là tam giác cân tại S và (SAC) vuông góc với đáy. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Giả sử mặt phẳng (P) qua O song song với SC cắt SA ở M. Tính thể tích khối chóp $MBCD$ và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SCD).

ĐS: $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{54}$, K/cách bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$

Bài 8.56. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình lặng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'C$ bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

ĐS: $V=\frac{a^3}{4}$

Bài 8.57. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AA'=a$. Đường thẳng $B'C$ tạo với đường thẳng AD một góc 60^o, đường chéo $B'D$ tạo với mặt bên $(BCC'B')$ một góc 30^o. Tính thể tích khối chóp $ACB'D'$ và cosin góc tạo bởi AC và $B'D$.

ĐS: $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{27}$, $\cos=\frac{1}{4\sqrt{7}}$.

Bài 8.58. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, có $SA\perp(ABCD)$. Gọi O là tâm của hình thoi. M là trung điểm của SC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM. Biết $SO=2\sqrt{2}, AC=4, AB=\sqrt{5}$.

ĐS:

Bài 8.59. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành với $AB=a, AD=2a$, có SC vuông góc $(ABCD)$, góc $\widehat{BAD}=60^o$; SA hợp với $(ABCD)$ góc 45^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa SA và BD.

ĐS: $V=\frac{a^3\sqrt{21}}{3}$, K/cách $\frac{a\sqrt{77}}{11}$.

Bài 8.60. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A(AD\parallel BC), AB=BC=2a, AD=3a$. Gọi M là trung điểm AD, N là trung điểm CM, biết (SNA) và (SNB) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, CD bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối chóp đã cho và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SCD).

ĐS: $V=\frac{25a^3}{3\sqrt{236}}$, K/cách $\frac{15a}{4\sqrt{41}}$.

Bài 8.61. *Diễn đàn boxmath.vn*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $AB=a, AD=2a$, $\widehat{BAD}=60^o$. Cạnh $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AM, AN, BP lần lượt vuông góc với BC, DC, SC tương ứng $(M'BC, N'DC, P'SC)$. Tính thể tích khối tứ diện $AMNP$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng NP, AC theo a.

ĐS: $V=\frac{5a^3\sqrt{3}}{64}$, K/cách $\frac{10a\sqrt{2829}}{943}$.

Phương pháp tính thể tích trực tiếp

Bài 8.62. *Tính thể tích khối chóp ta giác đều S.ABC trong các trường hợp sau:*
a. Cạnh đáy bằng a, góc $\widehat{ABC}$
b. $AB = a, SA = m.$
c. $SA = m$*,Góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng* α

ĐS: a. $V_{SABC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$; b. $V_{SABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}\sqrt{m^2 - \dfrac{a^2}{3}}$; c. $V_{SABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.\dfrac{m^2 sin\alpha}{sin^2\alpha + 4)\sqrt{sin^2\alpha + 4}}$

Bài 8.63. *Cho hình lăng trụ* $ABC.A'B'C'$ *có độ dài cạnh bên bằng 2a, tam giác ABC vuông tại A, AB =a,* $AC = a\sqrt{3}$*. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của BC. Tính* $V_{A'ABC}$.

ĐS:$\dfrac{a^2}{2}$

Bài 8.64. *Cho hình chóp SABC có* $SA\perp(ABCD)$*, SA =a.* δABC *vuông cân có* $AB = BC = a$*. B' là trung điểm của SB. C' là chân đường cao hạ từ A của* ΔSAC.
a. Tính V_{SABC}
b. Chứng minh $AB\perp(AB'C')$*. Tính* $V_{SAB'C'}$.

ĐS:$a.V_{SABC}\dfrac{a^3}{6}b.V_{SAB'C'} = \dfrac{a^3}{36}$

Bài 8.65. *Cho lăng trụ xiên ABCA'B'C', đáy ABC là tam giác đầu có tâm O. Hính chiếu của C' lên (ABC) trùng O. TÍnh thể tích khối lăng trụ biết khảng cách từ O đến CC' là a và góc giữa (ACC'A') và (BCC'B') bằng 2*α

ĐS:$\dfrac{27a^3 tan^3\alpha}{4\sqrt{2tan^2\alpha - 1}}$

Bài 8.66. *Cho hình lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A với AC =a và* $\widehat{ACB} = \alpha$*. Đường chéo BC' của mặt bên (BCC'B') hợp với mặt bên (ACC'A') một góc* β*. Tính thể tích lăng trụ.*

ĐS:$\dfrac{1}{2}.\dfrac{a^3 tan\alpha\sqrt{sin(\alpha - \beta)sin(\alpha + \beta)}}{cos\alpha sin\beta}$

Bài 8.67. *Cho hình hộp ABCDA'B'C'D' có đáy là hình thoi ABCD cạnh a, Góc A =* α *và chân đường vuông góc hạ từ B' xuống đáy (ABCD) trùng với giao điểm O của hai đường chéo. Cho BB' =a. Tính thể tích và diện tích xung quanh hình hộp.*

ĐS:$V = a^3 cos\dfrac{\alpha}{2}sin\alpha; S_{xq} = 4a^2 cos\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{1 + sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$

Bài 8.68. *Cho lăng trụ đứng* $ABCA_1B_1C_1$ *có đáy ABC là tam giác vuông AB=AC =a,*$AA_1 = a\sqrt{2}$*. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của đoạn* AA_1 *và* BC_1*. Chứng minh MN là đường vuông góc chưng của các dường thẳng* AA_1 *và* BC_1*. Tính* $V_{MA_1BC_1}$

ĐS:

Bài 8.69. *Cho hình nón có đỉnh là S, đáy là đường trọn tâm O, SA và SB là hai đường sinh biết SO=3cm, khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng 1cm, diện tích tam giác SAB bằng 18* cm^2*. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình nón đã cho.*

ĐS:

Bài 8.70. *Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, canh SA vuông góc với đáy* $.\widehat{ACB}=60^0, BC=a, SA=a\sqrt{3}$. *Gọi M là trung điểm của của cạnh SB. Chứng minh rằng* $(SAB)\perp(SBC)$. *TÍnh thể tích khối tứ diện MABC.*

ĐS:

Bài 8.71. *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Mặt phẳng* (α) *đi qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC lần lượt tại B', C' . biết C' là trung điểm của SC, tính tỉ số giữa SB' và B'B.*

ĐS:$\dfrac{SB'}{B'B}=2$

Bài 8.72. *Cho hình chóp S.ABC có đáy* $AB=AC=a, BC=\dfrac{a}{2}.SA=a\sqrt{3}, \widehat{SAB}=\widehat{SAC}=30^0$. *Tính thể tích khối chóp S.SABC .*

ĐS:$\dfrac{a^3}{16}$

Bài 8.73. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB=a, AD =2a. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh bên SB tạo với mặt phẳng đáy một góc* 60^0. *Trên SA lấy M sao cho* $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, *mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N . Tính thể tích chóp SBCMN.*

ĐS:$\dfrac{10\sqrt{3}a^3}{27}$

Bài 8.74. *Cho khối chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Biết SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và AB= SA =a, BC =2a. Một mặt phẳng qua A vuông góc với SC tại H và cắt SB tại K. Tính diện tích tam giác AHK theo a.*

ĐS:$\dfrac{a^2\sqrt{6}}{12}$

Bài 8.75. *cho hình chóp SABCD có* $SB=a\sqrt{2}$ *các cạnh còn lại đều bằng a. Tính thể tích khối chóp theo a.*

ĐS:

Bài 8.76. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật* $SA\perp(ABCD); AB=SA=1; AD=\sqrt{2}$. *Gọi M, N là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của BM và AC. Tính thể tích khối tứ diện ANIB.*

ĐS:$\dfrac{\sqrt{2}}{36}$

Bài 8.77. *Cho hình hộp* $ABCDA'B'C'D'$, *đáy ABCD là hình thoi cạnh a,* $AA'=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ *và* $\widehat{BAD}=\widehat{BAA'}=\widehat{DAA'}=60^0$. *Tính thể tích khối hộp theo a.*

ĐS:$\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Bài 8.78. *Cho hình hộp ABCDA'B'C'D', có AB =a, BC=2a, AA' =a. Lấy M trên AD sao cho AM=3MD. Tính thể tích khối chóp M.AB'C và khoảng cách từ M đến (AB'C).*

ĐS:$V_{M.AB'C}=\dfrac{a^3}{4}; d(M,(AB'C))=\dfrac{a}{2}$

Bài 8.79. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh 2a.* $\widehat{BAD} = 60^0$*. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm canh BC và SD. Mặt phẳng (AMN) cắt cạnh bên SC tại E. Biết MN vuông góc với AN. Tính thể tích khối đa diện ADN.MCE theo a.*

ĐS:$\frac{5a\sqrt{3}}{9}$

Bài 8.80. *Cho tứ diện ABCD có AB=6, CD =7, khoảng cách giữa AB và CD bằng 8, góc giữa AB và CD bằng* 60^0*. Tính thể tích khối tứ diện ABCD.*

ĐS:$28\sqrt{3}$

Bài 8.81. *Cho hình lăng trụ đứng* $ABCA'B'C'$ *có đáy ABC là tam giác vuông với AB=BC=a, canh bên* $AA' = a\sqrt{2}$*. M là điểm trên AA' sao cho* $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$*. Tính thể tích khối tứ diện MA'BC'.*

ĐS:$\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$

Bài 8.82. *Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có cạnh bên bằng a, đáy ABC là tam giác đều, hình chiếu của A trên (A'B'C') trùng với trọng tâm G của tam giác A'B'C'. Mặt phẳng (BB'C'C) tạo với (A'B'C') góc* 60^0 *. Tính thể tích lăng trụ ABC.A'B'C' theo a.*

ĐS: $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{9a^3}{32}$

Bài 8.83. *Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A1B1C1 có đáy là tam giác đều cạnh 2a, điểm A1 cách đều ba điểm A, B, C. Cạnh bên A1A tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Hãy tìm α, biết thể tích khối lăng trụ ABC.A1B1C1 bằng* $2\sqrt{3}a^3$.

ĐS:$\alpha = 60^0$

Bài 8.84. *Cho hình chóp S.ABCD có ñáy là hình thang vuông tại A, AB =AD=a, DC=2a , ,SA=a 3 hai mặt bên (SDC) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) .*
1. Tính thể tích của khốichóp S.ABCD theo a .
2. G là ttrọng tâm của tam giác DBC . Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC)

ĐS:1.$V_{SABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$;2.$\frac{a}{3}$

Bài 8.85. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, mặt bên SAB là tam giác đều và vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp S.ABCD biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng a.*

ĐS:$\frac{a^3 7\sqrt{7}}{18}$

LĂNG TRỤ XIÊN

Lưu ý: Cần nắm vững kĩ thuật xác định chân đường cao đã học.

Bài 8.86. *Cho lăng trụ ABC A'B'C'có các cạnh đáy là 13;14;15và biết cạnh bên bằng 2a hợp với đáy ABCD một góc* 45^o *. Tính thể tích lăng trụ.*

ĐS: $V = a^3\sqrt{2}$

Bài 8.87. *Cho lăng trụ ABCD A'B'C'D'có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và biết cạnh bên bằng 8 hợp với đáy ABC một góc* 30^o*.Tính thể tích lăng trụ.*

ĐS: $V = 336$

Bài 8.88. *Cho hình hộp ABCD A'B'C'D'có AB =a;AD =b;AA' = c và* $\angle BAD = 30^0$*và biết cạnh bên AA' hợp với đáy ABC một góc* 60^o*.Tính thể tích lăng trụ.*

ĐS: $V = \dfrac{abc\sqrt{3}}{4}$

Bài 8.89. *Cho lăng trụ tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều A,B,C biết* $AA' = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$*.Tính thể tích lăng trụ.*

ĐS: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Bài 8.90. *: Cho lăng trụ ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , đỉnh A' có hình chiếu trên (ABC) nằm trên đường cao AH của tam giác ABC biết mặt bên (BB'C'C) hợp với đáy (ABC) một góc* 60^o .
1) Chứng minh rằng BB'C'C là hình chữ nhật.
2) Tính thể tích lăng trụ ABC A'B'C'.

ĐS: $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Bài 8.91. *Cho lăng trụ ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều với tâm O. Cạnh b CC' = a hợp với đáy (ABC) 1 góc* 60^o *và C' có hình chiếu trên ABC trùng với O .*
1) Chứng minh rằng AA'B'B là hình chữ nhật. Tính diện tích AA'B'B.
2) Tính thể tích lăng trụ ABCA'B'C'.

ĐS: $1.S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}, 2.V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Bài 8.92. *Cho lăng trụ ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết chân đường vuông góc hạ từ A' trên ABC trùng với trung điểm của BC và AA' = a.*
1) Tìm góc hợp bởi cạnh bên với đáy lăng trụ.
2) Tính thể tích lăng trụ.

ĐS: $1.30^0; V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Bài 8.93. *Cho lăng trụ xiên ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều với tâm O. Hình chiếu của C' trên (ABC) là O. Tính thể tích của lăng trụ biết rằng khoảng cách từ O đến CC' là a và 2 mặt bên AA'C'Cvà BB'C'C hợp với nhau một góc* 90^o

ĐS: $V = \dfrac{27a^3}{4\sqrt{2}}$

Bài 8.94. *Cho hình hộp ABCD A'B'C'D' có 6 mặt là hình thoi cạnh a,hình chiếu vuông góc của A' trên (ABCD) nằm trong hình thoi,các cạnh xuất phát từ A của hộp đôi một tạo với nhau một góc60^o.*
1) Chứng minh rằng H nằm trên đường chéo AC của ABCD.
2) Tính diện tích các mặt chéo ACC'A' và BDD'B'.
3) Tính thể tích của hộp.

ĐS: $S_{ACC'A'} = a^2\sqrt{2}; S_{BDD'B'} = a^2, V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Bài 8.95. *Cho hình hộp ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và góc A = 60^o ,chân đường vuông góc hạ từ B' xuông ABCD trùng với giao điểm 2 đường chéo đáy biết BB' = a.*
1)Tìm góc hợp bởi cạnh bên và đáy.
2)Tính thể tích và tổng diện tích các mặt bên của hình hộp.

ĐS: $1.60^0, V = \frac{3a^3}{4}$ & $S = a^2\sqrt{15}$

Bài 8.96. *B – 2002 : Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$có cạnh bằng a*
1)Tính theo a khoảng cách giữa 2 đường thẳng A_1B và B_1D.
2) Gọi M ,N , P lần lượt là các trung điểm của các cạnh BB_1, CD, A_1D_1. Tính góc giữa 2 đường thẳng MP và C_1N.

ĐS: $1.d(A_1B, B_1D) = \frac{a\sqrt{6}}{6}, 2.90^0$

Bài 8.97. *B 2009 : Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có BB' = a, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0; tam giác ABC vuông tại C và $\angle BAC = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A'ABC theo a.*

ĐS: $9a^3/208$

Bài 8.98. *D-09: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).*

ĐS: $V = \dfrac{4a^3}{9}, d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

Bài 8.99. *(B-11) cho hình lăng trụ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có đáy BAC là hình chữ nhật, AB=a, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A_1 lên (ABCD) trung với giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60^0. TÍnh thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.*

ĐS: $V = \dfrac{3a^3}{2}, d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài 8.100. *Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của C'B' và C'D'.*

1.Dựng thiết diện của khối lập phương khi cắt bởi mp(AEF).

2.Tính tỉ số thể tích hai phần của khối lập phương bị chia bởi mặt phẳng (AEF).