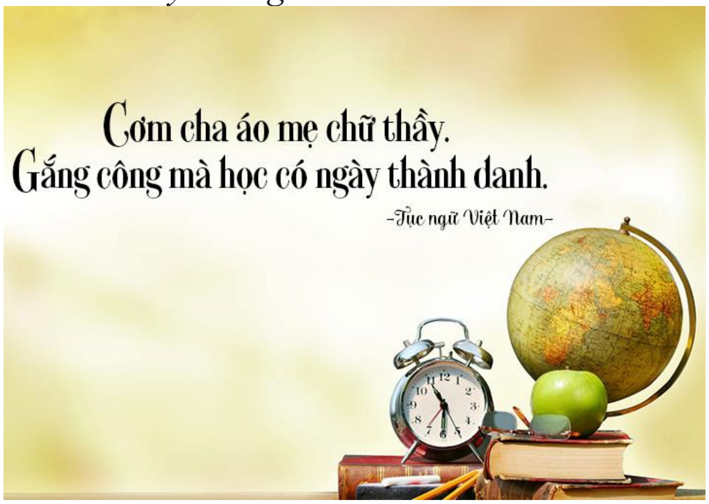
Lời nói đầu !
Xin lấy một đoạn trích từ tiểu thuyết trinh thám rất nổi tiếng "Phía sau nghi can X" của tác giả Higashino Keigo làm lời nói đầu, đây cũng là suy nghĩ của rất nhiều thầy, cô giáo dạy toán, chúc các em học sinh tìm được niềm yêu thích học toán, học toán vui vẻ và thắng lợi trong các kì thi sắp tới !

……

- Thưa thầy, có những trường đại học không thi đầu vào bằng môn toán. Ai thi vào những trường đó thì điểm môn toán thế nào mà chẳng được hả thầy. Ishigami nhìn về phía có tiếng nói. Cậu học sinh tên là Morioka. Cậu ta đưa tay gãi gãi gáy và nói với các bạn xung quanh:"Mọi người nhỉ!"
Tuy không phải là giáo viên chủ nhiệm nhưng Ishigami cũng biết cậu Morioka nhỏ con này là thủ lĩnh của lớp. cậu ta bị nhắc nhở nhiều lần vì lén dùng xe máy đi học.
- Em sẽ thi trường như thế hả Morioka? – Ishigami hỏi.
- Nếu thi thì em sẽ chọn trường như thế tuy bây giờ em chưa muốn học lên đại học. nhưng dù thế nào thì lên lớp mười hai, em sẽ không học môn toán nữa. Điểm toán sẽ chẳng quan trọng gì đối với em. Ngay cả thầy cũng mệt vì phải dạy những đứa dốt như bọn em rồi. Thôi thì chúng ta, nói thế nào nhỉ, hãy cư xử như người lớn với nhau.
Cả lờp cười ồ lên trước câu nói cuối cùng của Morioka. Ishigami mỉm cười.
- Nếu em nghĩ tới các thầy thì hãy đỗ trong kì thi lại lần tới. Phạm vi chỉ có phần vi phân và tích phân thôi. Chẳng có gì đáng kể cả.
Morioka tặc lưỡi một cái rất to. Cậu ta thu hai chân đang dạng ra hai bên rồi vắt tréo lên nhau.
- Vi phân với tích phân thì có ích cho việc gì ạ? Có vẻ như chỉ phí thời gian.
Ishigami đang quay lên bảng, định chữa bài thi cuối kì nhưng anh quay lại khi nghe thấy câu nói của Morioka. Đó là câu hỏi anh không thể bỏ qua.
- Em thích xe máy, đúng không nhỉ? Em đã xem đua xe bao giờ chưa?
Morioka bối rối gật đầu trước câu hỏi bất ngờ của Ishigami.
- Các tay đua không chạy xe với một vận tốc nhất định. Họ luôn luôn thay đổi vận tốc, không chỉ để thích ứng với địa hình và hướng gió mà còn vì những lý do mang tính chiến thuật nữa. Việc phán đoán ngay tức thì xem chỗ nào nên giảm tốc, chỗ nào nên tăng tốc và tăng như thế nào sẽ quyết định việc thắng hay thua. Em có hiểu không?
- Em hiểu, nhưng việc đó thì có liên quan gì tới toán học?
- Mức tăng tốc này chính là phép vi phân của vận tốc tại thời điểm đó. Còn cự ly đua chính là phép tích phân của vận tốc liên tục thay đổi. trong một cuộc đua, tất nhiên xe nào cũng chạy cùng một cự ly nhưng để giành chiến

thắng thì việc tính vi phân vận tốc sẽ là yếu tố rất quan trọng. Thế nào, có phải vi phân và tích phân không có ích cho việc gì không?
Mặt Morioka có vẻ bối rối, có lẽ cậu không hiểu điều Ishigami vừa nói lắm.
- Nhưng mà những tay đua họ có nghĩ đến việc đó không? Tích phân với cả vi phân ấy. em nghĩ thắng hay thua là bằng kinh nghiệm và cảm giác thôi.
- Tất nhiên. Nhưng những nhân viên hỗ trợ cho các tay đua thì có nghĩ đến đấy. để lên chiến lược cho tay đua, họ sẽ phải mô phỏng thật chi tiết nhiều lần xem tăng tốc ở đoạn nào và tăng tốc như thế nào thì có thể giành phần thắng. khi ấy họ phải dùng đến phép tích phân và vi phân. Có lẽ bản thân họ cũng không biết là mình đang sử dụng tích phân và vi phân nhưng việc học sử dụng phần mềm có ứng dụng vi phân và tích phân là sự thật.
- Nếu thế thì chỉ cần người làm ra phần mềm đó học toán thôi phải không ạ?
- Có lẽ vậy, nhưng không hẳn là em sẽ không trở thành người như vậy phải không Morioka?
Morioka uỡn người ra đằng sau.
- Em không trở thành người như thế đâu.
- Không phải là em thì sẽ là ai đó đang có mặt ở đây. Giờ toán là để cho một ai đó như thế. – Ishigami nhìn xuống cả lớp. – Thầy nói cho các em biết, những điều thầy đang dạy các em mới chỉ là cánh cửa để bước vào thế giới toán học mà thôi. Nếu các em không biết cánh cửa đó ở đâu thì các em không thể đi vào bên trong được. tất nhiên, em nào không thích thì không cần vào. Thầy kiểm tra các em là chỉ muốn xem các em có biết cổng vào ở chỗ nào hay không thôi.



"Suy nghĩ, suy nghĩ, suy nghĩ nữa".
"Nghiên cứu khoa học giống như khoan gỗ, có người thích khoan gỗ mỏng, còn tôi thích khoan gỗ dày".

Anbe Anhxtanh

Chủ đề 1: Khảo sát hàm số và các vấn đề liên quan

1.Bảng các đạo hàm

$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}.u'$
$(x)'=1$	$c'=0$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(u\pm v)'=u'\pm v'$	$(uv)'=u'v+v'u$
$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$(ku)'=k.(u)'$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=\cos u.(u)'$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-\sin u.(u)'$
$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)'=\frac{1}{\cos^2 u}(u)'$
$(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}(u)'$
$(e^x)'=e^x$	$(e^u)'=e^u.u'$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$(a^u)'=a^u.\ln a.u'$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}$

2. Xét dấu biểu thức.

- Định lý về dấu của nhị thức

bậc nhất $y=f(x)=ax+b\,(a\neq 0)$

X	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Y		$af(x)<0$	0	$af(x)>0$	

- Định lý về dấu của tam thức bậc

hai $y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$

$$\Delta=b^2-4ac\left(\Delta'=(b')^2-ac=\frac{\Delta}{4},b'=\frac{b}{2}\right)$$

+) Nếu $\Delta<0\,(\Delta'<0)$ phương trình $y=0$ vô nghiệm.

X	$-\infty$		$+\infty$
Y		$af(x)>0$	

+) Nếu $\Delta=0\,(\Delta'=0)$ phương trình y=0 có nghiệm kép $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y		$af(x)>0$	0	$af(x)>0$	

+) Nếu $\Delta>0\,(\Delta'>0)$ phương trình $y=0$ có hai nghiệm phân biệt

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$, sắp xếp hai nghiệm $x_1<x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y		$af(x)>0$	0	$af(x)<0$	0	$af(x)>0$	

- Định lý vi-et: Khi phương trình bậc hai

$ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ có hai nghiệm

$x_1;x_2$ ta có $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ P=x_1.x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$

- Ứng dụng định lý vi-et

1. Hai nghiệm cùng dấu
   $\Leftrightarrow \Delta\geq 0$ và $P>0$
2. Hai nghiệm trái dấu
   $\Leftrightarrow \Delta>0$ và $P<0 \Leftrightarrow a.c<0$
3. Hai nghiệm dương(lớn hơn 0)
   $\Leftrightarrow \Delta\geq 0$; $S>0$ và $P>0$
4. Hai nghiệm âm(nhỏ hơn 0)
   $\Leftrightarrow \Delta\geq 0$; $S<0$ và $P>0$

3. Phương trình tiếp tuyến (PT^3)

- PT^3 với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc là $f'(x_0)$
- PT^3 với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$, $y_0 = f(x_0)$
M được gọi là tiếp điểm
x_0 được gọi là hoành độ của tiếp điểm
y_0 được gọi là tung độ của tiếp điểm
$f'(x_0)$ được gọi là hệ số góc của tiếp tuyến.

- Nếu PT^3 song song với đường thẳng $y = ax + b$ thì $f'(x_0) = a$
- Nếu PT^3 vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$ thì $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$
- Nếu PT^3 tạo với trục 0x một góc α thì $f'(x_0) = \pm\tan\alpha$
- Nếu PT^3 cắt hai trục tọa độ tạo thành một tam giác vuông cân thì $f'(x_0) = \pm 1$

4. Quy tắc xét tính đơn điệu hàm số

- Tìm tập xác định của hàm số
- Tính đạo hàn $f'(x)$, tìm các điểm $x_i\ (i = 1, 2...n)$ mà tại đó đạo hàm bằng không hoặc không xác định.
- Sắp xếp x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- Nêu các kết luận về sự đồng biến nghịch biến của hàm số

5. Quy tắc tìm cực trị hàm số

- Tìm tập xác định của hàm số
- Tính $f'(x)$, tìm các điểm $x_i\ (i = 1, 2...n)$ mà tại đó đạo hàm bằng không hoặc không xác định.
- Sắp xếp x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên
- Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị của hàm số.

6.Quy tắc tìm GTLN, GTNN của hàm số liên tục trên một đoạn.

- Tìm các điểm $x_1; x_2; ...; x_n$ trên $(a; b)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc không xác định.
- Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); ...; f(x_n); f(b)$.
- Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Khi đó:

$M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$, $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$

Chú ý: Để tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng, nửa khoảng ta có thể lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng, nửa khoảng đó và từ đó kết luận. Không phải hàm số nào cũng có GTLN, GTNN.

7. Đường tiệm cận

- Đường tiệm cân ngang: $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$
- Đường tiệm cận đứng: $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} = \pm\infty$
- Đường thẳng $y = ax + b,\ a \neq 0$ đgl **đường tiệm cận xiên** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$

- Để xác định các hệ số a, b trong phương trình của **tiệm cận xiên**, ta có thể áp dụng các công thức sau:

$a = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}; b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - ax\right]$ hay

$a = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}; b = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - ax\right]$

8. Tương giao của hai đồ thị.

- Xét hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tọa độ giao điểm của đồ thị hai hàm số là nghiệm của hệ phương trình.

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

- Đường thẳng $y = ax + b$ là PT^3 của đồ thị hàm số $y = f(x)$, khi và chỉ khi phương trình $\begin{cases} f(x) = ax + b \\ f'(x) = a \end{cases}$ có nghiệm.

9. Các bước xét sự biến thiên của hàm số

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Xét sự biến thiên của hàm số:

  + Tính y'.

  + Tìm các điểm tại đó đạo hàm y' bằng 0 hoặc không xác định.

  + Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).

  + Lập bảng biến thiên ghi rõ dấu của đạo hàm, chiều biến thiên, cực trị của hàm số.
- Vẽ đồ thị của hàm số:

  + Vẽ các đường tiệm cận (nếu có) của đồ thị.

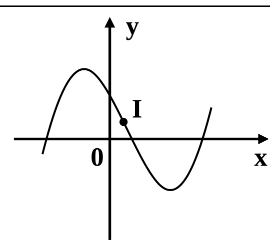
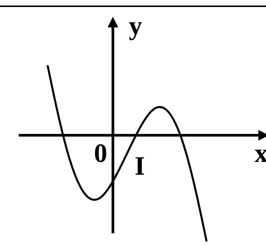
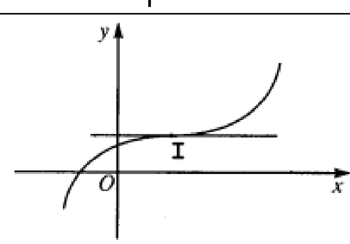
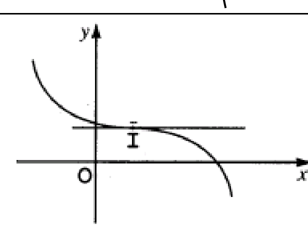
  + Xác định một số điểm đặc biệt của đồ thị như giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (trong trường hợp đồ thị không cắt các trục toạ độ hoặc việc tìm toạ độ giao điểm phức tạp thì có thể bỏ qua). Có thể tìm thêm một số điểm thuộc đồ thị để có thể vẽ chính xác hơn.

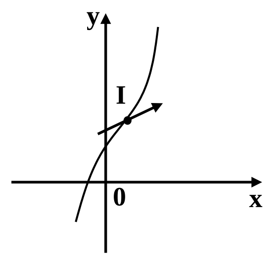
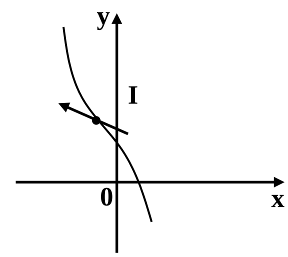
  + Nhận xét về đồ thị: Chỉ ra trục đối xứng, tâm đối xứng (nếu có) của đồ thị.

10. Một số hàm số thường gặp:

10.1 Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$**:**

- Tập xác định D = R.
- Các dạng đồ thị:

	a > 0	**a < 0**
y’ = 0 có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac > 0$		
y’ = 0 có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac = 0$		

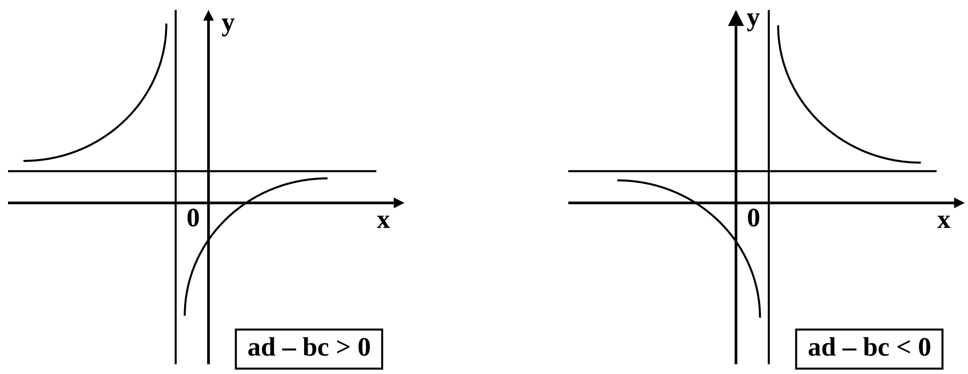
y' = 0 vô nghiệm ⇔ $\Delta' = b^2 - 3ac < 0$		

Một số công thức cần nhớ:

- $y' = 3a^2 + 2bx + c$
- Hàm số không có cực trị: $b^2 - 3ac \le 0$
- Hàm số luôn đồng biến trên TXĐ $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$, chú ý khi hệ số a có m phải xét riêng trường hợp a=0
- Hàm số luôn nghịch biến trên TXĐ $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$, chú ý khi hệ số a có m phải xét riêng trường hợp a=0
- Hàm số có hai điểm cực trị: $b^2 - 3ac > 0$
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị trái dấu (Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về 2 phía 0y): $ac < 0$
- Hàm số có hai cực trị cùng dấu(đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về một phía trục 0y): $y' = 3a^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1.x_2 > 0 \end{cases}$
- Hàm số có hai cực trị cùng dương (đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về bên phải trục 0y: $y' = 3a^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm dương phân biệt $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$
- Hàm số có hai cực trị cùng âm (đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về bên trái trục 0y): $y' = 3a^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm âm phân biệt $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$
- Phương trình $y = 0$ có ba nghiệm tạo thành một cấp số cộng: Phương trình có ba nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm là: $-\dfrac{b}{3a}$
- Phương trình $y = 0$ có ba nghiệm tạo thành một cấp số nhân: Phương trình có ba nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm là: $-\sqrt[3]{\dfrac{d}{a}}$
- Khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của hàm số: $\sqrt{\dfrac{4e + 16e^3}{a}}$ $, e = \dfrac{b^2 - 3ac}{9a}$

10.2. Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ **:**

- Tập xác định D = $R\backslash\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$, $y'=\dfrac{\mathrm{ad}-\mathrm{bc}}{(\mathrm{cx}+\mathrm{d})^2}$
- Đồ thị có một tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{d}{c}$ và một tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$. Giao điểm của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.
- Các dạng đồ thị:



Các công thức cần nhớ:

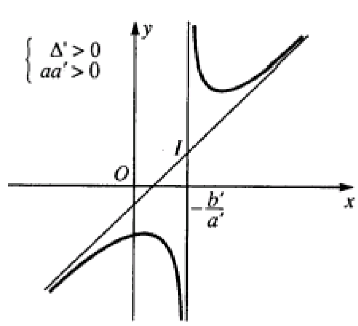
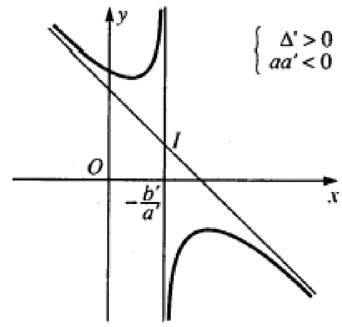
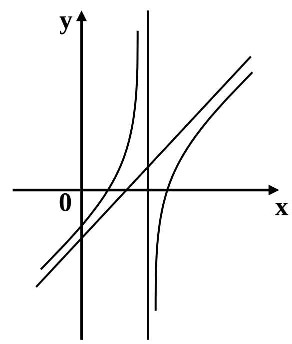
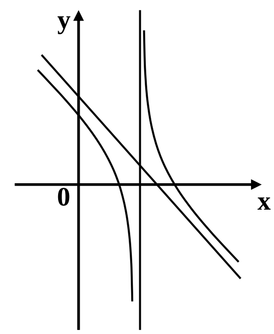
1. Diện tích hình chữ nhật tạo thành giữa hai tiệm cận và hai trục tọa độ $\left|-\dfrac{d}{c}\right|.\left|\dfrac{a}{c}\right|$

2. Điểm thuộc đồ thị thỏa mãn tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai cực trị là nhỏ nhất có hoành độ là nghiệm của phương trình: $(cx+d)^2=|ad-bc|$

10.3 Hàm số hữu tỷ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ $(a.a'\neq 0,\ \textit{tử không chia hết cho mẫu})$ **:**

- Tập xác định D = $R\backslash\left\{-\dfrac{b'}{a'}\right\}$.
- Đồ thị có một tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{b'}{a'}$ và một tiệm cận xiên. Giao điểm của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

- Các dạng đồ thị:

	a.a′ > 0	**a.a′ < 0**
y′ = 0 có 2 nghiệm phân biệt		
y′ = 0 vô nghiệm		

Một số công thức tính nhanh $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$

- $y' = \dfrac{a.a'x^2 + 2ab'x + bb' - ca'}{\left(a'x + b\right)^2}$
- Hàm số đồng biến trên từng khoảng tập xác định D: $\Leftrightarrow a.a'x^2 + 2ab'x + bb' - ca' \geq 0, \forall x \in D$
- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng tập xác định D: $\Leftrightarrow a.a'x^2 + 2ab'x + bb' - ca' \leq 0, \forall x \in D$
- Hàm số đồng biến trên K: $\Leftrightarrow \begin{cases} a.a'x^2 + 2ab'x + bb' - ca' \geq 0 \\ x \neq -\dfrac{b'}{a'} \end{cases}, \forall x \in K$
- Hàm số nghịch biến trên K: $\Leftrightarrow \begin{cases} a.a'x^2 + 2ab'x + bb' - ca' \leq 0 \\ x \neq -\dfrac{b'}{a'} \end{cases}, \forall x \in K$
- Đường thẳng qua hai điểm cực trị : $y = \dfrac{\left(ax^2 + bx + c\right)'}{\left(a'x + b'\right)'} = \dfrac{2ax + b}{a'}$

Chủ đề 2: Tọa độ véc tơ trong không gian

1. Định nghĩa và các phép toán

• Định nghĩa, tính chất, các phép toán về vectơ trong không gian được xây dựng hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng.

• Lưu ý:

+ **Qui tắc ba điểm:** Cho ba điểm A, B, C bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

+ **Qui tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành ABCD, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

+ **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB, O tuỳ ý.

Ta có: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$

+ **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Cho G là trọng tâm của tam giác ABC, O tuỳ ý. Ta có:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

+ **Điều kiện hai vectơ cùng phương:**

$\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *cùng phương* $(\vec{a}\neq\vec{0}) \Leftrightarrow \exists! k\in R: \vec{b}=k\vec{a}$

2. Sự đồng phẳng của ba vectơ

• Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

• **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:** Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow \exists!$ m, n $\in$ R: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$

• Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tuỳ ý.

Khi đó: $\exists!$ m, n, p $\in$ R: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

3. Tích vô hướng của hai vectơ

• **Góc giữa hai vectơ trong không gian:**

$\overrightarrow{AB}=\vec{u},\overrightarrow{AC}=\vec{v}\Rightarrow(\vec{u},\vec{v})=BAC\ (0^0\le BAC\le 180^0)$

• **Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:**

+ Cho $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$. Khi đó:

$$\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$$

+ Với $\vec{u}=\vec{0}$ *hoặc* $\vec{v}=\vec{0}$. Qui ước: $\vec{u}.\vec{v}=0$

+ $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

4. Các công thức tọa độ véc tơ

$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\ \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$.

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$

$k\vec{a}=k(a_1;a_2;a_3)=(ka_1;ka_2;ka_3)\ (k\in R)$

• $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$

• *Với* $\vec{b}\neq\vec{0}:\vec{a},\vec{b}$ *cùng phương*

$$\Leftrightarrow\exists k\in R:\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}$$

•Nếu: M là trung điểm AB, G là trọng tâm của tam giác ABC thì ta có:

$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

$$\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}\\z_M=\dfrac{z_A+z_B}{2}\end{cases};\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\\z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\end{cases}$$

5. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

• $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\ \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$.

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

• $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

• $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

• $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

6. Tích có hướng của hai véc tơ

- Cho $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$.

$$\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$
$$=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$$

Là véc tơ vuông góc với cả hai véc tơ $\vec{a}$; $\vec{b}$

- $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a},\vec{b}].\vec{c}=0$

- ***Diện tích hình bình hành ABCD:***

$$S_{\square ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$$

- ***Diện tích tam giác ABC:***

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$$

- ***Thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D':***

$$V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$$

- ***Thể tích khối tứ diện ABCD:***

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$$

7. Phương trình mặt phẳng:

- Phương trình mặt phẳng α qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$ là $(\alpha):A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

Chú ý:

.VTPT là véc tơ $\neq\vec{0}$ có giá vuông góc với mặt phẳng,

. Nếu $(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$ thì nó có một VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$

. Nếu đường thẳng vuông góc với mặt phẳng thì VTCP của đường thẳng là VTPT của mặt phẳng

. Nếu $\vec{n}\perp\vec{a};\vec{b}$ chọn $\vec{n}=\left[\vec{a};\vec{b}\right]$

.Hai mặt phẳng song song có cùng VTPT

. Phương trình mặt phẳng đặc biệt.

$(0xy):z=0;\quad (0yz):x=0;\quad (0xz):y=0$

Một số loại viết phương trình thường gặp

Loại 1: (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$:

(α): $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

Loại 2: (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có cặp VTCP $\vec{a},\vec{b}$ (hai véc tơ này không cùng phương và vuông góc với (α)):

Khi đó một VTPT của (α) là $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$.

Loại 3: (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song với mặt phẳng (β): $Ax+By+Cz+D=0$

(α): $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

Loại 4: (α) đi qua 3 điểm không thẳng hàng A, B, C:

Khi đó ta có thể xác định một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$

Loại 5: (α) đi qua một điểm M và một đường thẳng (d) không chứa M:

– Trên (d) lấy điểm A và VTCP $\vec{u}$.

– Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]$

Loại 6: (α) đi qua một điểm M và vuông góc với một đường thẳng (d):

VTCP $\vec{u}$ của đường thẳng (d) là một VTPT của (α).

Loại 7: (α) đi qua 2 đường thẳng cắt nhau d_1, d_2:

– Xác định các VTCP $\vec{a},\vec{b}$ của các đường thẳng d_1, d_2.

– Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$.

– Lấy một điểm M thuộc d_1 hoặc d_2 $\Rightarrow M\in(\alpha)$.

Loại 8: (α) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 *(d_1, d_2 chéo nhau)*:

– Xác định các VTCP $\vec{a},\vec{b}$ của các đường thẳng d_1, d_2.

– Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$.

– Lấy một điểm M thuộc d_1 $\Rightarrow M\in(\alpha)$.

Loại 9: (α) đi qua điểm M và song song với hai đường thẳng chéo nhau d1, d2:

– *Xác định các VTCP $\vec{a},\vec{b}$ của các đường thẳng d1, d2.*

– *Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$.*

Loại 10: (α) đi qua một đường thẳng (d) và vuông góc với một mặt phẳng (β):

– *Xác định VTCP $\vec{u}$ của (d) và VTPT $\vec{n}_\beta$ của (β).*

– *Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=[\vec{u},\vec{n}_\beta]$.*

– *Lấy một điểm M thuộc d $\Rightarrow M\in(\alpha)$.*

Loại 11: (α) đi qua điểm M và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau (β), (γ):

– *Xác định các VTPT $\vec{n}_\beta,\vec{n}_\gamma$ của (β) và (γ).*

– *Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=[\vec{n}_\beta,\vec{n}_\gamma]$.*

Loại 12: (α) là tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H:

– *Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R.*

– *Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\overrightarrow{IH}$*

Chú ý: ***Để viết phương trình mặt phẳng cần nắm vững các cách xác định mặt phẳng đã học ở lớp 11***

8. Phương trình đường thẳng

- Phương trình đường thẳng qua

$M(x_0;y_0;z_0)$ có VTCP $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ là

d: $\begin{cases}x=x_0+u_1t\\y=y_0+u_2t\\z=x_0+u_3t\end{cases}$ là phương trình tham số

hoặc $\dfrac{x-x_0}{u_1}=\dfrac{y-y_0}{u_2}=\dfrac{z-z_0}{u_3}$ là phương trình chính tắc; $(u_1,\ u_2,\ u_3\neq 0)$,

Chú ý:

.VTCP là véc tơ $\neq\vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng.

. Đường thẳng qua A, B thì nó có một VTCP là $\overrightarrow{AB}$

. Nếu đường thẳng vuông góc với mặt phẳng thì nó có VTCP là VTPT của mặt phẳng,

. Hai đường thẳng song song thì có cùng VTCP.

. Nếu $\vec{u}\perp\vec{a};\vec{b}$ chọn $\vec{u}=[\vec{a};\vec{b}]$

. Phương trình đường thẳng đặc biệt:

$0x:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases};\quad 0y:\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases};\quad 0z:\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$

Một số loại viết phương trình thường gặp:

Loại 1 : *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$:

$$(d):\begin{cases}x=x_o+u_1t\\y=y_o+u_2t\\z=z_o+u_3t\end{cases}\qquad (t\in R)$$

Loại 2: *d* đi qua hai điểm *A, B*:

Một VTCP của d là $\overrightarrow{AB}$.

Loại 3: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và song song với đường thẳng Δ cho trước:

Vì d // Δ nên VTCP của Δ cũng là VTCP của d.

Loại 4: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước:

Vì d ⊥ (P) nên VTPT của (P) cũng là VTCP của d.

Loại 5: *d* là giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q):

- *Cách 1: Tìm một điểm và một VTCP.*

– *Tìm toạ độ một điểm A ∈ d: bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases}(P)\\(Q)\end{cases}$ (với việc chọn giá trị cho một ẩn)*

– *Tìm một VTCP của d: $\vec{u}=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]$*

- *Cách 2: Tìm hai điểm A, B thuộc d, rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.*

Loại 6: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với hai đường thẳng *d1, d2:*

Vì d ⊥ d1, d ⊥ d2 nên một VTCP của d là: $\vec{u}=[\vec{u}_{d_1},\vec{u}_{d_2}]$

Loại 7: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng *Δ*.

• *Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M0 trên đường thẳng Δ.*

$$\begin{cases} H \in \Delta \\ \overrightarrow{M_0H} \perp \vec{u}_\Delta \end{cases}$$

Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M0, H.

• *Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d; (Q) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khi đó d = (P) ∩ (Q)*

Loại 8: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và cắt hai đường thẳng *d1, d2:*

• *Cách 1: Gọi M1 ∈ d1, M2 ∈ d2. Từ điều kiện M, M1, M2 thẳng hàng ta tìm được M1, M2. Từ đó suy ra phương trình đường thẳng d.*

• *Cách 2: Gọi (P) =* (M_0,d_1), *(Q) =* (M_0,d_2). *Khi đó d = (P) ∩ (Q). Do đó, một VTCP của d có thể chọn là* $\vec{u} = \left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right]$.

Loại 9: *d* nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng *d1, d2:*

Tìm các giao điểm A = d1 ∩ (P), B = d2 ∩ (P). Khi đó d chính là đường thẳng AB.

Loại 10: *d* song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng *d1, d2:*

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ và d1, mặt phẳng (Q) chứa Δ và d2.

Khi đó d = (P) ∩ (Q).

Loại 11: *d* là đường vuông góc chung của hai đường thẳng *d1, d2* chéo nhau:

• *Cách 1: Gọi M ∈ d1, N ∈ d2. Từ điều kiện* $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases}$, *ta tìm được M, N.*

Khi đó, d là đường thẳng MN.

• *Cách 2:*

– *Vì d ⊥ d1 và d ⊥ d2 nên một VTCP của d có thể là:* $\vec{u} = \left[\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}\right]$.

– *Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d1, bằng cách:*

+ *Lấy một điểm A trên d1.*

+ *Một VTPT của (P) có thể là:* $\vec{n}_P = \left[\vec{u}, \vec{u}_{d_1}\right]$.

– *Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và d2.*

Khi đó d = (P) ∩ (Q).

Loại 12: *d* là hình chiếu của đường thẳng Δ lên mặt phẳng (P):

• *d qua điểm M là giao của Δ và (P)*

VTCT của d là:

$$\vec{u}_d = \left[\left[\vec{u}_\Delta, \vec{n}_P\right], \vec{n}_P\right].$$

Loại 13: *d* đi qua điểm M, vuông góc với *d1* và cắt *d2*:

• *Cách 1: Gọi N là giao điểm của d và d2. Từ điều kiện MN ⊥ d1, ta tìm được N.*

Khi đó, d là đường thẳng MN.

• *Cách 2:*

– *Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d1.*

– *Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa M và d2.*

Khi đó d = (P) ∩ (Q).

9. Khoảng cách

- Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng:

$\mathrm{M}(x_0;y_0;z_0)$ và $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

$$d\left(M;(\alpha)\right) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng: Cho điểm M và đường thẳng d qua M_0 có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$. Khi đó

$$d(M,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: Cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1;d_2$. d_1 qua M_1 có VTCP u_1, d_1 qua M_2 có VTCP u_2. Khi đó:

$$d(d_1,d_2)=\frac{\left|\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]\right|}$$

10. Góc

- Nếu $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$

thì (α) có một VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$

- Nếu d: $\begin{cases} x=x_0+u_1t \\ y=y_0+u_2t \\ z=x_0+u_3t \end{cases}$ hoặc

$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}$ thì d có một VTCP $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$

- $\cos(d;d')=\left|\cos\left(\vec{u}_d;\vec{u}_{d'}\right)\right|$
- $\cos\left((\alpha);(\beta)\right)=\left|\cos\left(\vec{n}_{(\alpha)};\vec{n}_{(\beta)}\right)\right|$
- $\sin\left(d;(\alpha)\right)=\left|\cos\left(\vec{u}_d;\vec{n}_\alpha\right)\right|$

Chú ý công thức tính góc giữa 2 véc tơ

$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\ \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

11. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

- Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$d:\begin{cases} x=x_0+u_1t \\ y=y_0+u_2t \\ z=z_0+u_3t \end{cases}$, có VTCP $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$, qua $M(x_0;y_0;z_0)$

$d':\begin{cases} x=x'_0+u'_1t' \\ y=y'_0+u'_2t' \\ z=z'_0+u'_3t' \end{cases}$,có VTCP $\vec{u}'=(u'_1;u'_2;u'_3)$ qua $M'(x'_0;y'_0;z'_0)$ ta làm theo các bước:

- **<u>Cách 1:</u>**

$d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_d;\vec{u}_{d'}\right]=\vec{0} \\ \left[\vec{u}_d;\overrightarrow{MM'}\right]\neq 0 \end{cases}$

$d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_d;\vec{u}_{d'}\right]=\vec{0} \\ \left[\vec{u}_d;\overrightarrow{MM'}\right]=\vec{0} \end{cases}$

d cắt d’ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_d;\vec{u}_{d'}\right]\neq\vec{0} \\ \left[\vec{u}_d;\vec{u}_{d'}\right]\overrightarrow{MM'}=0 \end{cases}$

d chéo d’ $\Leftrightarrow \left[\vec{u}_d;\vec{u}_{d'}\right]\overrightarrow{MM'}\neq 0$

Chú ý để nhớ các công thức này ta cần dựa vào các công thức:

1. Hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương thì $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\vec{0}$
2. Hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương thì $\left[\vec{a};\vec{b}\right]\neq\vec{0}$
3. Ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng thì $\left[\vec{a};\vec{b}\right]\vec{c}=\vec{0}$
4. Ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng thì $\left[\vec{a};\vec{b}\right]\vec{c}\neq\vec{0}$

- **Cách 2:**

Bước 1. Nếu $\begin{cases} \vec{u}'=k\vec{u} \\ M\in d' \end{cases}$ thì d trùng d’

Nếu $\begin{cases} \vec{u}'=k\vec{u} \\ M\notin d' \end{cases}$ thì d song song với d’.

Nếu $\vec{u}'\neq k\vec{u}$ chuyển sang bước 2.

Bước 2. Xét hệ phương trình

$\begin{cases} x_0+u_1t=x'_0+u'_1t' \\ y_0+u_2t=y'_0+u'_2t' \\ z_0+u_3t=z'_0+u'_3t' \end{cases}$

-Nếu hệ phương trình vô nghiệm thì d và d’ chéo nhau

- Nếu hệ phương trình có nghiệm duy nhất t, t’ thì hai đường thẳng cắt nhau.

10. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho $d:\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$ và

$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ để xét vị trí tương đối của d và (α) ta xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

-Nếu hệ phương trình vô nghiệm thì d song song (α)

-Nếu hệ phương trình có vô số nghiệm thì d nằm trong (α)

-Nếu hệ phương trình có một nghiệm thì d cắt

11. Phương trình mặt cầu

- Phương trình mặt cầu tâm

$I(a;b;c)$ bán kính R là:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Phương trình

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phươn trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính

$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

Chủ đề 3: Thống Kê

I, Số gần đúng- Sai Số

1. Số gần đúng

Trong đo đạc, tính toán ta thường chỉ nhận được các số gần đúng.

2. Sai số tuyệt đối

Nếu a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ thì $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ đgl **sai số tuyệt đối** của số gần đúng *a*.

3. Độ chính xác của một số gần đúng

Nếu $\Delta_a = |\overline{a} - a| \le d$ thì $a - d \le \overline{a} \le a + d$. Ta nói *a* là ssố gần đúng của $\overline{a}$ với **độ chính xác *d***, và qui ước viết gọn là $\overline{a} = a \pm d$.

4. Sai số tương đối

Sai số tương đối của số gần đúng *a* là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và $|a|$, kí hiệu $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$.

- δ_a càng nhỏ thì độ chính xác của phép đo đạc hoặc tính toán càng lớn.
- Ta thường viết δ_a dưới dạng phần trăm.

5. Qui tròn số gần đúng

- Nếu chữ số ngay sau hàng qui tròn nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi số 0.
- Nếu chữ số ngay sau hàng qui tròn lớn hơn hay bằng 5 thì ta thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi số 0 và cộng thêm một đơn vị vào chữ số ở hàng qui tròn.

6. Làm tròn một số với độ chính xác cho trước

Để làm tròn một số với độ chính xác cho trước ta sẽ tìm lũy thừa của 10 lớn hơn và gần nhất với độ chính xác để làm tròn.

VD: độ chính xác d=3 thì ta sẽ làm tròn đến hàng chục do 3<10

Độ chính xác d= 200 thì ta sẽ làm tròn đến hàng nghìn vì 200<1000

Độ chính xác d=0.92 thì ta sẽ làm tròn đến hàng đơn vị vì 0.92<1

Chú ý : Độ chính xác còn có thể cho dưới dạng $\overline{a} = a \pm d$

II, Các số đặc trưng của mẫu số liệu không ghép nhóm

1, Số trung bình cộng

Giá trị	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_k
Tần số tương đối	$f_1 = \frac{n_1}{n}$	$f_2 = \frac{n_2}{n}$		$f_k = \frac{n_k}{n}$

Số trung bình :

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k}{n} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k$$

Trong đó n_k là tần số của giá trị x_k và $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

2. Số Trung Vị

Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm n số liệu thành một dãy không giảm (hoặc không tăng).

- Nếu n là lẻ thì số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n+1}{2}$ (số đứng chính giữa) gọi là *trung vị*.
- Nếu n là chẵn thì số trung bình cộng của hai số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2}+1$ gọi là *trung vị*.

Trung vị kí hiệu là M_e.

3. Tứ Phân Vị

Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm N số liệu thành một dãy không giảm.

Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là bộ ba giá trị: tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ hai và tứ phân vị thứ ba; ba giá trị này chia mẫu số liệu thành bốn phần có số lượng phần tử bằng nhau.

- Tứ phân vị thứ hai Q_2 bằng trung vị.
- Nếu N là số chẵn thì tứ phân vị thứ nhất Q_1 bằng trung vị của nửa dãy phía dưới và tứ phân vị thứ ba Q_3 bằng trung vị của nửa dãy phía trên.
- Nếu N là số lẻ thì tứ phân vị thứ nhất Q_1 bằng trung vị của nửa dãy phía dưới (không bao gồm Q_2) và tứ phân vị thứ ba Q_3 bằng trung vị của nửa dãy phía trên (không bao gồm Q_2).

4. Mốt

Mốt của mẫu số liệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số và kí hiệu là M_o

5. Khoảng Biến Thiên- Khoảng Tứ Phân Vị

- Trong một mẫu số liệu, khoảng biến thiên là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.

Ta có thể tính khoảng biến thiên R của mẫu số liệu theo công thức sau: $R = x_{\max} - x_{\min}$, trong đó $x_{\max}$ là giá trị lớn nhất, $x_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.

- Giả sử Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu số liệu.

Ta gọi hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là khoảng tứ phân vị, của mẫu số liệu đó.

6. Phương Sai- Độ Lệch Chuẩn

Phương Sai:

$$s^2 = \frac{n_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2 + n_2\left(x_2-\overline{x}\right)^2 + \ldots + n_k\left(x_k-\overline{x}\right)^2}{n}$$

$$s^2 = f_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2 + f_2\left(x_2-\overline{x}\right)^2 + \ldots + f_k\left(x_k-\overline{x}\right)^2,$$

Độ lệch chuẩn: Căn bậc hai của phương sai gọi là *độ lệch chuẩn* của mẫu số liệu thống kê.

III, Các số đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm

1, Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ

Nhóm	**Tần số**	**Tần số tích lũy**
$[a_1;a_2)$	n_1	$cf_1 = n_1$
$[a_2;a_3)$	n_2	$cf_2 = n_1 + n_2$
…	…	…
$[a_m;a_{m+1})$	n_m	$cf_m = n_1 + n_2 + \ldots n_m$
	n	

2, Số trung bình cộng số trung bình

- Trung điểm x_i của nửa khoảng (tính bằng trung bình cộng của hai đầu mút) ứng với nhóm i là giá trị đại diện của nhóm đó.
- Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\overline{x}$, được tính theo công thức:

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_mx_m}{n}$$

3, Số Trung Vị

Giả sử nhóm k là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2}$, tức là $c_{k-1} < \frac{n}{2}$ nhưng $cf_k \geq \frac{n}{2}$. Ta gọi r, d, n_k lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm k; cf_{k-1} là tần số tích luỹ của nhóm $k-1$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_eđược tính theo công thức sau:

$$M_e = r + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf_{k-1}}{n_k}\right).d.$$

4, Tứ Phân Vị

- *Tứ phân vị thứ hai* Q_2 bằng trung vị $M_{e'}$
- Giả sử nhóm p là nhóm đầu tiên có tần số

tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4}$, tức là $cf_{p-1} < \frac{n}{4}$ nhưng $cf_p \ge \frac{n}{4}$. Ta gọi s, h, n_p lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm $p; cf_{p-1}$ là tần số tích luỹ của nhóm $p-1$.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 được tính theo công thức sau: $Q_1 = s + \left(\frac{\frac{n}{4} - cf_{p-1}}{n_p} \right) \cdot h.$

- Giả sử nhóm q là nhóm đầu tiên có tần số tích

luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4}$, tức là $cf_{q-1} < \frac{3n}{4}$ nhưng $cf_q \ge \frac{3n}{4}$. Ta gọi t, l, n_q lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm q; cf_{q-1} là tần số tích luỹ của nhóm $q-1$.

Tứ phân vị thứ ba Q_3 được tính theo công thức sau: $Q_3 = t + \left(\frac{\frac{3n}{4} - cf_{q-1}}{n_q} \right) . l$.

5, Mốt : Giả sử nhóm i là nhóm có tần số lớn nhất. Ta gọi u, g, n_i lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm $i; n_{i-1}, n_{i+1}$ lần lượt là tần số của nhóm $i-1$, nhóm $i+1$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_o, được tính theo công thức sau:

$$M_o = u + \left(\frac{n_i - n_{i-1}}{2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}} \right) \cdot g.$$

Chú ý: • Khi $i = 0$ thì $n_0 = 0$; • Khi $i = m$ thì $n_{m+1} = 0$.

6. Khoảng Biến Thiên- Khoảng Tứ Phân Vị

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng:

Nhóm	**Tần số**	**Tần số tích lũy**
$[a_1; a_2)$	n_1	$cf_1 = n_1$
$[a_2; a_3)$	n_2	$cf_2 = n_1 + n_2$
…	…	…
$[a_m; a_{m+1})$	n_m	$cf_m = n_1 + n_2 + ...n_m$
	n	

Khoảng biến thiên R của mẫu số liệu theo công thức sau: $R = a_{m+1} - a_1$

- Giả sử Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu số liệu. Ta gọi hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là khoảng tứ phân vị, của mẫu số liệu đó.

7. Phương Sai- Độ Lệch Chuẩn

Trung điểm x_i của nửa khoảng (tính bằng trung bình cộng của hai đầu mút) ứng với nhóm i là giá trị đại diện của nhóm đó. Khi đó

Phương Sai:

$$s^2 = \frac{n_1 (x_1 - \overline{x})^2 + n_2 (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + n_k (x_k - \overline{x})^2}{n}$$

Độ lệch chuẩn: Căn bậc hai của phương sai gọi là *độ lệch chuẩn* của mẫu số liệu thống kê.

Chủ đề 4: Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng

1. Bảng các nguyên hàm- tích phân

- **Các nguyên hàm cơ bản**

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,\ \int dx = x + c,$$

$$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + C,\ \alpha > 0,\ \alpha \neq 1$$

- **Các nguyên hàm thường dùng**

$$\int (ax+b)^{\alpha}dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + C$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$$

$$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)| + C$$

$$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)| + C$$

$$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$$

$$\int \alpha^{ax+b}dx = \frac{\alpha^{ax+b}}{a\ln\alpha} + C,\ \alpha > 0,\ \alpha \neq 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm p}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm p}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

b) Nếu F(x) là một nguyên hàm f(x) thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

c) Tính tích phân.

- **Phương pháp đổi biến số dạng 1**

$$I = \int_b^b f(\varphi(x)).\varphi'(x)dx$$

Đặt $t = \varphi(x)$. Khi đó

$$I = \int_b^b f(\varphi(x)).\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

Chú ý: $t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x)dx$

$g(t) = \varphi(x) \Rightarrow g'(t)dt = \varphi'(x)dx$

- **Phương pháp đổi biến số dạng 2.**

$I = \int_a^b f(x)dx$

Đặt $x = \varphi(t)$. Với φ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $[\alpha;\beta]$, trong đó $a = \varphi(\alpha); b = \varphi(\beta)$.Khi đó

$I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\sin t$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	a=tant
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{a}{\sin t}$

- **Phương pháp tích phân từng phần**

$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

Chú ý:

$\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx \end{cases}$

$\int dx$	P(x)sinx	P(x)cosx
U	P(x)	P(x)
Dv	Sinxdx	Cosxdx

$\int dx$	$P(x)e^x$	P(x)lnx
u	P(x)	Lnx
dv	$e^x dx$	P(x)dx

d) Ứng dụng của tích phân.

- Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục và trục hoành,x=a; x=b (a<b) được tính theo công thức:

$S = \int_a^b |f(x)|dx$

- Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng x=a, x=b. Khi đó diện tích S của D được tính bởi công thức:

$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

- Hàm số $y = f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a;b]$ thì :

$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx = \left|\int_a^b f(x) - g(x)dx\right|$

- Thể tích vật thể

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm các điểm *a* và *b*.
S(x) là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(a \le x \le b)$. Giả sử *S(x)* liên tục trên đoạn [a; b].

Thể tích của B là: $V = \int_a^b S(x)dx$

- Thể tích V của khối tròn xoay

khi quay hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ trục 0x và hai đường thẳng x=a, x=b xung quanh trục 0x được tính: $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$

Chủ đề 5: Tổ hợp- Nhị thức Niu-Tơn

1. Quy tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m+n$ cách thực hiện

2. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực thiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai có $m.n$ cách hoàn thành.

3. Hoán vị

Cho tập hợp a gồm n phần tử $(n \ge 1)$. Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

Ta kí kiệu số các hoán vị của n phần tử là

$\boxed{P_n = n(n-1)...2.1 = n!}$

4. Chỉnh hợp

Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \ge 1)$. Kết quả của việc lấy k phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo mộ thứ tự nào đó đgl một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

Ta kí hiệu số các chỉnh hợp chập k của n phần tử là: $\boxed{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$

5. Tổ hợp

Giải sử tập hợp A có n phần tử $(n \ge 1)$. Mỗi tập con gồm k phần tử của A đgl một **tổ** hợp chập k của n phần tử đã cho.

Ta kí hiệu số các tổ hợp chập k của n phần tử là :

$\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$

$C_n^k = C_n^{n-k}$; $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$

6. Công thức nhị thức Niu-Tơn

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ...$$

$$+ C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

- Nhắc lại các công thức lũy thừa

$a^n = \underbrace{a.a...a}_{n}$, $a^0 = 1$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$
$\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$	$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$
$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$

Chủ đề 6. Xác Suất

1. Xác Suất

Kí hiệu	Ngôn ngữ biến cố
Ω	Không gian mẫu
$A \subset \Omega$	A là biến cố
$A = \varnothing$	A là biến cố không
$A = \Omega$	A là biến cố chắc chắn
$C = A \cup B$	C là biến cố: “A hoặc B”
$C = A \cap B$	C là biến cố: “A và B”
$A \cap B = \varnothing$	A và B xung khắc
$B = \overline{A} = \Omega \setminus A$	A và B đối nhau

2. Xác suất của biến cố

- $\boxed{P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}}$
- $P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1,\ 0 \le P(A) \le 1$
- A, B xung khắc:
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- *Mở rộng: A, B bất kì:*
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- A và B là hai biến cố độc lập:
  $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$

3. Xác Suất có điều kiện

Cho hai biến cố A và B . Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B, kí hiệu là $P(A|B)$. Nếu $P(B) > 0$ thì $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$

4. Công thức nhân xác suất

Cho hai biến cố A và B bất kì thì

$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)$

5. Công thức tính phần bù

$P(A|B) + P(\overline{A}|B) = 1$

6. Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A và B với $0 < P(B) < 1$, ta có

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$
$$= P(B).P(A|B) + P(\overline{B}).P(A|\overline{B})$$

7. Công thức BAYES

Cho hai biến cố A và B với $P(A) > 0, P(B) > 0$, ta có : $P(B|A) = \dfrac{P(B).P(A|B)}{P(A)}$

$$= \frac{P(B).P(A|B)}{P(B).P(A|B) + P(\overline{B}).P(A|\overline{B})}$$

Chủ đề 7: Mũ, Lô-ga

1. Các công thức lũy thừa

$a^n = \underbrace{a.a...a}_{n}$, $a^0 = 1$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$
$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$	$\left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha\beta}$
$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$	$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$

2. Các công thức Loogarít

$\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$,

$\log_a 1 = 0$

$a^{\log_a b} = b$

$\log_a\left(a^\alpha\right) = \alpha$

$\ln a = \log_e a;$

$\lg b = \log b = \log_{10} b$

$\log_a\left(b_1 b_2\right) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

$\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$

$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \log_a b.\log_b c = \log_a c$,

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$,

3. Phương trình- Bất phương trình mũ.

a)Phương trình mũ

- **Dạng cơ bản:**

$a^x = b \ (a > 0, a \neq 1)$

nếu $b \leq 0$ phương trình vô nghiệm, nếu b>0 phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$

- **Đưa về cùng cơ số**

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

- **Đặt ẩn phụ**

Dạng 1: $A.a^{2x} + B.a^x + C = 0$ đặt $t = a^x \ (t > 0)$ phương trình trở thành

$A.t^2 + Bt + C = 0$

Dạng 2:

$A.a^{2x} + B(ab)^x + C.b^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow A.\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + B\left(\frac{a}{b}\right)^x + C = 0$

Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x \quad (t > 0)$

Dạng 3:

$A.a^x + B.b^x + C = 0$ với $ab = 1$

hoặc $a^x.b^x = 1$ ta đặt $t = a^x \ (t > 0)$. Khi đó $b^x = \frac{1}{t}$

- **Loogarít hóa**

Với $M, N > 0$ và $a > 0, a \neq 1$

$M = N \Leftrightarrow \log_a M = \log_a N$

$a^{f(x)} = M \Leftrightarrow f(x) = \log_a M$

b)Bất phương trình mũ

- $a > 1: a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$
- $0 < a < 1$
  $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$
- Chú ý $b = a^{\log_a b}$

4. Phương trình- Bất phương trình lôgarít

a)Phương trình lôgarit

- **Dạng cơ bản**

$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b \ (a > 0, a \neq 1)$

Chú ý: điều kiện $\log_a f(x)$ là $\begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0; a \neq 1 \end{cases}$

- **Đưa về cùng cơ số**

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

- **Đặt ẩn phụ**

Dạng 1:

$A(\log_a x)^2 + B(\log_a x) + C = 0$

đặt $t = \log_a x \Leftrightarrow At^2 + Bt + C = 0$,

chú ý $(\log_a b)^2 = \log_a^2 b$

Dạng 2:

$A\log_a x + B\log_x a + C = 0$ đặt

$t = \log_a x \Leftrightarrow \log_x a = \frac{1}{t}\ (x > 0, x \neq 1)$

- **Mũ hóa**

$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$

b)Bất phương trình lôgarit

- a>1

$\log_a f(x) \le \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

- $0 < a < 1$

$\log_a f(x) \le \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

5. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN LÃI SUẤT

5.1.LÃI KÉP : là tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

Công thức tính : Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép r%/kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn $(n \in N^*)$ là : $S_n = A.(1+r)^n$ (0.2)

5.2.TIỀN GỬI HÀNG THÁNG :Mỗi tháng gửi đúng cùng một số tiền vào một thời gian cố định.

Công thức tính : Đầu mỗi tháng khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép r% một tháng thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng $(n \in N^*)$ là :

$$S_n = \frac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r) \qquad (0.3)$$

5.3.GỬI NGÂN HÀNG VÀ RÚT TIỀN GỬI HÀNG THÁNG.

Công thức: Gửi (vay) ngân hàng số tiền A đồng với lãi suất r% một tháng.Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra (trả) số tiền X đồng. Tính số tiền còn lại sau n tháng là bao nhiêu?

Công thức số tiền còn lại sau n tháng là:

$$S_n = A(1+r)^n - X.\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Chú ý: Nếu bài toán cho tháng gửi A đồng, mỗi thảng gửi thêm X đồng thì ta thay trước X thành dấu cộng trong công thức

5.4.BÀI TOÁN TĂNG LƯƠNG: Một người được lãnh lương khởi điểm là A đồng/tháng. Cứ n tháng thì lương người đó được tăng thêm r% /tháng. Hỏi sau nk tháng người đó được lĩnh tất cả bao nhiêu?

Công thức tính: $S_{kn} = Ak.\frac{(1+r)^k - 1}{r}$ (0.6)

5.5.BÀI TOÁN TĂNG TRƯỞNG DÂN SỐ

Công thức $S = A.e^{n.r}$. n: sau n thời gian, r: Tỉ lệ tăng.S: tổng số dân số sau n năm.

.

Chủ đề 8. Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác

1. Góc lượng giá. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

- **Quan hệ giữa độ và radian**

$1° = \frac{\pi}{180}\text{rad}$ và $1\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$.

- **Góc lượng giác và số đo của chúng**

Khái niệm: Trong mặt phẳng cho hai tia $Ou,\ Ov$. Nếu tia Om quay chỉ theo chiều dương (hay chỉ theo chiều âm) từ tia Ou đến trùng với tia Ov, thì ta nói: tia Om quét một **góc lượng giác** với tia đầu Ou, tia cuối Ov và kí hiệu là $(Ou,\ Ov)$.

Nhận xét: Góc lượng giác $(Ou,\ Ov)$ chỉ được xác định khi ta biết được chiều chuyển động quay của tia Om từ tia đầu Ou đến tia cuối Ov. Ta quy ước: chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương, chiều quay cùng với chiều quay của kim đồng hồ là chiều âm.

Khi tia Om quay góc $a°$ thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo $a°$ hay ($\frac{\pi a}{180}rad$). Vì thế, mỗi một góc lượng giác đều có 1 số đo, đơn vị đo góc lượng giác là độ hoặc radian. Nếu **góc lượng giác** $(Ou,\ Ov)$ có số đo là α thì ta kí hiệu là $sd(Ou,\ Ov) = \alpha$ hoặc $(Ou,\ Ov) = \alpha$.

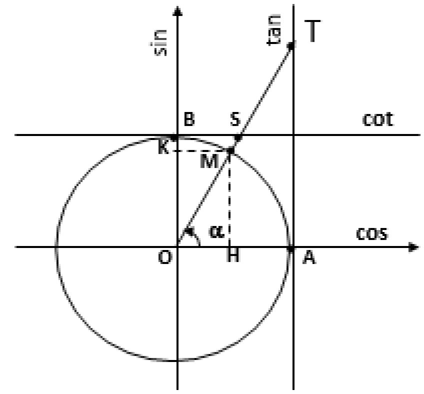
Cho hai tia $Ou,\ Ov$ thì có vô số **góc lượng giác** tia đầu Ou, tia cuối Ov. Mỗi **góc lượng giác** như thế đều kí hiệu là $(Ou,\ Ov)$. Số đo của các góc lượng giác này sai khác nhau một bội nguyên của $360°$

- Hệ thức Chasles:

$$(Ou;Ov) + (Ov;Ow) = (Ou;Ow)$$

- **Định nghĩa các giá trị lượng giác**

Cho $(OA,OM) = \alpha$. Giả sử $M(x;y)$.



$$\cos\alpha = x = \overline{OH}$$
$$\sin\alpha = y = \overline{OK}$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \overline{AT} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \overline{BS} \quad (\alpha \neq k\pi)$$

2.Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \tan x \cot x = 1$$

3.Công thức cộng lượng giác

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

4.Công thức cung nhân đôi

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Chú ý: Nếu đặt $\tan\frac{x}{2} = t$ thì ta có:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}; \cot x = \frac{1-t^2}{2t}$$

5.Công thức hạ bậc

$\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}; \quad \sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

6. Công thức cung nhân ba

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a;$

$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

7.Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

8.Công thức biến đổi tích thành tổng.

$\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$

$\sin a\sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$

$\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$

9.Giá trị lượng giác của các góc liên quan.

Góc / GTLG	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi+\alpha$
Sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
Cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
Tan	$-\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
Cot	$-\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$

Góc / GTLG	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\alpha-\frac{\pi}{2}$	$\alpha-\pi$
Sin	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
Cos	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
Tan	$-\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$\tan\alpha$
Cot	$-\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$\cot\alpha$

10. Hàm số lượng giác

- *Nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$ thì f là hàm số chẵn.*
- *Nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$ thì f là hàm số lẻ.*
- *Cho hàm số* $y = f(x)$ với tập xác định D. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi x thuộc D ta có: $x+T \in D; x-T \in D; f(x+T) = f(x)$

Số dương T nhỏ nhất thỏa mãn (nếu có) các tính chất trên được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

- Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung là trục đối xứng, đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng
- Tập xác định hàm số $y = \sin x;\ y = \cos x$ là $D = \mathbb{R}$
- Tập xác định hàm số $y = \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- Tập xác định hàm số $y = \cot x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $-1 \le \sin x, \cos x \le 1$
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, hàm số $y = \sin x, y = \tan x, y = \cot x$ là các hàm số lẻ .
- Hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ là hàm tuần hoàn với chu kì 2π
- Hàm số $y = \tan x, y = \cot x$ là hàm tuần hoàn với chu kì π

11.Phương trình sinx=a

- $|a| > 1$ phương trình vô nghiệm
- $|a| \le 1$ có góc $\alpha: \begin{cases} \sin\alpha = a \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$\sin f(x) = \sin g(x)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

- Các trường hợp đặc biệt

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

12.Phương trình cosx=a

- $|a| > 1$ phương trình vô nghiệm
- $|a| \le 1$ có góc $\alpha : \begin{cases} \cos\alpha = a \\ 0 \le \alpha \le \pi \end{cases}$
- $\cos f(x) = \cos g(x)$
  $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$
- Các trường hợp đặc biệt

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

13.Phương trình tanx=a

- Đk: $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Luôn có góc $\alpha : \begin{cases} \tan\alpha = a \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases}$
- $\tan f(x) = \tan g(x)$
  $\Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

14.Phương trình cotx=a

- Đk: $x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Luôn có góc $\alpha : \begin{cases} \cot\alpha = a \\ 0 < \alpha < \pi \end{cases}$
- $\cot f(x) = \cot g(x)$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

15. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Dạng	Đặt	Điều Kiện
$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$	t = sinx	$-1 \le t \le 1$
$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$	t = cosx	$-1 \le t \le 1$
$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$	t = tanx	$x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$
$a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$	t = cotx	$x \ne k\pi \quad (k \in Z)$

16. Phương trình bậc nhất theo sinx và cosx dạng: $a\sin x + b\cos x = c$

- Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- Đặt :

$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
$(\alpha \in [0, 2\pi])$

Phương trình trở thành

$$\cos\alpha.\sin x + \sin\alpha.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge c^2.$$

17. Phương trình đẳng cập bậc hai với sinx và cosx dạng: $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$

- Kiểm tra cosx = 0 có thỏa mãn không

Lưu ý :cosx = 0 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1.$

- Khi $\cos x \ne 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x \ne 0$ ta được:

$a.\tan^2 x + b.\tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$

18. Phương trình đối xứng với sinx, cosx

Dạng 1:

a.(sinx + cosx) + b.sinx.cosx + c = 0

- Đặt: $t = \cos x + \sin x$; $|t| \le \sqrt{2}$.

$\Rightarrow t^2 = 1 + 2\sin x.\cos x$

$\Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1).$

- Thay vào phương trình ta được phương trình bậc 2 theo t. Chú ý:

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Dạng 2:

a.(cosx - sinx) + b.sinx.cosx + c = 0

- Đặt: $t = \cos x - \sin x$; $|t| \le \sqrt{2}$.

$\Rightarrow t^2 = 1 - 2\sin x.\cos x$

$\Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{1}{2}(1 - t^2)$.

- Thay vào phương trình ta được phương trình bậc 2 theo t

Chú ý:

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Chủ đề 9 : Dãy số- Cấp số cộng-Cấp số nhân

1. Dãy số

a. Dãy số

$$u:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$$
$$n\mapsto u(n)$$

Dạng khai triển: $(u_n) = u_1, u_2, ..., u_n, ...$

b. Dãy số tăng, dãy số giảm

- (u_n) *là dãy số tăng*

$\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ *với* $\forall n \in N^*$.

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$ *với* $\forall n \in N^*$

$\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ *với* $\forall n \in N^*$ $(u_n > 0)$.

- (u_n) *là dãy số giảm*

$\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ *với* $\forall n \in N^*$.

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$ *với* $\forall n \in N^*$

$\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ *với* $\forall n \in N^*$ $(u_n > 0)$.

c. Dãy số bị chặn

- (u_n) *là dãy số bị chặn trên* $\Leftrightarrow \exists M \in R: u_n \le M,\ \forall n \in N^*$.
- (u_n) *là dãy số bị chặn dưới* $\Leftrightarrow \exists m \in R: u_n \ge m,\ \forall n \in N^*$.
- (u_n) *là dãy số bị chặn* $\Leftrightarrow \exists m, M \in R: m \le u_n \le M,\ \forall n \in N^*$.

2. Cấp số cộng

a. Định nghĩa: (u_n) *là cấp số cộng*

$\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d,\ \forall n \in N^*$

(d: công sai)

b. Số hạng tổng quát:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \qquad \text{với } n \ge 2$$

c. Tính chất các số hạng:

$$u_k = \frac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2} \qquad \text{với } k \ge 2$$

d. Tổng *n* số hạng đầu tiên:

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n(u_1+u_n)}{2} = \frac{n\left[2u_1+(n-1)d\right]}{2}$$

3. *Cấp số nhân*

a. Định nghĩa: (u_n) *là cấp số nhân* $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n.q$ *với* $n \in N^*$ *(q: công bội)*

b. Số hạng tổng quát: $u_n = u_1.q^{n-1}$

với $n \ge 2$

c. Tính chất các số hạng:

$$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1} \qquad \text{với } k \ge 2$$

d. Tổng *n* số hạng đầu tiên:

$$\left[\begin{array}{ll} S_n = nu_1 & \text{với } q = 1 \\ S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{với } q \ne 1 \end{array}\right.$$

Chủ đề 10 : Giới hạn

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

a. Giới hạn đặc biệt:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0\,;\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}=0\ (k\in\mathbb{Z}^+)$$

$$\lim_{n\to+\infty}q^n=0\ (|q|<1)\,;$$

$$\lim_{n\to+\infty}C=C$$

b. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

$$S=u_1+u_1q+u_1q^2+\ldots=\frac{u_1}{1-q}\quad\left(|q|<1\right)$$

2. Giới hạn vô cực của dãy số

a. Giới hạn đặc biệt:

$$\lim\sqrt{n}=+\infty\qquad \lim n^k=+\infty\ (k\in\mathbb{Z}^+)$$

$$\lim q^n=+\infty\ (q>1)$$

b. Định lí:

- $\frac{a}{\infty}=0$
- $\frac{a}{0}=\infty \qquad a\neq 0$
- $a.\infty=\infty \qquad a\neq 0$

** Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.*

3. Giới hạn hữu hạn của hàm số

a. Giới hạn đặc biệt:

$$\lim_{x\to x_0}x=x_0\,;\quad \lim_{x\to x_0}c=c\ \ (c\text{: hằng số})$$

b. Giới hạn một bên:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=L$$

4. Giới hạn vô cực của hàm số

a. Giới hạn đặc biệt:

$$\lim_{x\to+\infty}x^k=+\infty\,;\ \lim_{x\to-\infty}x^k=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn}\\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}c=c\,;\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x^k}=0$$

b. Định lí:

- $\frac{a}{\infty}=0$
- $\frac{a}{0}=\infty \quad ,\ a\neq 0$
- $a.\infty=\infty \quad ,a\neq 0$

** Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.*

5. Hàm số liên tục

a. Hàm số liên tục tại một điểm:

$y = f(x)$ liên tục tại x_0

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$$

b. *Nếu $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a). f(b)< 0$ thì tồn tại ít nhất một số $c \in (a; b)$: $f(c) = 0$.*

Chủ đề 11: Hình học không gian

I. Quan hệ song song

1. Hai đường thẳng song song

a) Định nghĩa:

$$\boxed{a\,//\,b \Leftrightarrow \begin{cases} a,b\subset (P) \\ a\cap b=\varnothing \end{cases}}$$

b) Tính chất

- $\begin{cases} (P)\neq (Q)\neq (R) \\ (P)\cap (Q)=a \\ (P)\cap (R)=b \\ (Q)\cap (R)=c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a,b,c \text{ đồng qui} \\ a\,//\,b\,//\,c \end{array}\right.$
- $\begin{cases} (P)\cap (Q)=d \\ (P)\supset a,(Q)\supset b \\ a\,//\,b \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d\,//\,a\,//\,b \\ d\equiv a\,(d\equiv b) \end{array}\right.$
- $\begin{cases} a\neq b \\ a\,//\,c,b\,//\,c \end{cases} \Rightarrow a\,//\,b$

2. Đường thẳng và mặt phẳng song song

a) Định nghĩa: $\boxed{d\,//\,(P) \Leftrightarrow d\cap (P)=\varnothing}$

b) Tính chất

- $\begin{cases} d\not\subset (P),d'\subset (P) \\ d\,//\,d' \end{cases} \Rightarrow d\,//\,(P)$
- $\begin{cases} d\,//\,(P) \\ (Q)\supset d,(Q)\cap (P)=a \end{cases} \Rightarrow d\,//\,a$
- $\begin{cases} (P)\cap (Q)=d \\ (P)\,//\,a,(Q)\,//\,a \end{cases} \Rightarrow d\,//\,a$

3. Hai mặt phẳng song song

a) Định nghĩa: $\boxed{(P)\,//\,(Q) \Leftrightarrow (P)\cap (Q)=\varnothing}$

b) Tính chất

- $\begin{cases} (P)\supset a,b \\ a\cap b=M \\ a\,//\,(Q),b\,//\,(Q) \end{cases} \Rightarrow (P)\,//\,(Q)$
- $\begin{cases} (P)\neq (Q) \\ (P)\,//\,(R) \\ (Q)\,//\,(R) \end{cases} \Rightarrow (P)\,//\,(Q)$
- $\begin{cases} (Q)\,//\,(R) \\ (P)\cap (Q)=a \\ (P)\cap (R)=b \end{cases} \Rightarrow a\,//\,b$

4. Chứng minh quan hệ song song

a) Chứng minh hai đường thẳng song song

Có thể sử dụng 1 trong các cách sau:

- *Chứng minh 2 đường thẳng đó đồng phẳng, rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (như tính chất đường trung bình, định lí Talét đảo, …)*
- *Chứng minh 2 đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba.*
- *Áp dụng các định lí về giao tuyến song song.*

b) Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Để chứng minh $d\,//\,(P)$, ta chứng minh d không nằm trong (P) và song song với một đường thẳng d' nào đó nằm trong (P).

c) Chứng minh hai mặt phẳng song song

Chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng trong mặt phẳng kia.

II. Quan hệ vuông góc

1. Hai đường thẳng vuông góc

a) Định nghĩa: $\boxed{a\perp b \Leftrightarrow \left(a,b\right)=90^0}$

b) Tính chất

$\begin{cases} b\,//\,c \\ a\perp c \end{cases} \Rightarrow a\perp b$

2. Đường thẳng và mặt phẳng vuông góc

a) Định nghĩa: $\boxed{d\perp (P) \Leftrightarrow d\perp a,\ \forall a\subset (P)}$

b) Tính chất

Điều kiện để đường thẳng ⊥ mặt phẳng:

$\begin{cases} a,b\subset (P),a\cap b=O \\ d\perp a,d\perp b \end{cases} \Rightarrow d\perp (P)$

- $\begin{cases} a\,//\,b \\ (P)\perp a \end{cases} \Rightarrow (P)\perp b$
- $\begin{cases} a\neq b \\ a\perp (P),b\perp (P) \end{cases} \Rightarrow a\,//\,b$
- $\begin{cases} (P)\,//\,(Q) \\ a\perp (P) \end{cases} \Rightarrow a\perp (Q)$
- $\begin{cases} (P)\neq (Q) \\ (P)\perp a,(Q)\perp a \end{cases} \Rightarrow (P)\,//\,(Q)$

- $\begin{cases} a \,//\, (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp a$
- $\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \perp b, (P) \perp b \end{cases} \Rightarrow a \,//\, (P)$

• **Mặt phẳng trung trực** của một đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của nó.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

• **Định lí ba đường vuông góc**

Cho $a \not\perp (P), b \subset (P)$, a′ là hình chiếu của a trên (P). Khi đó b ⊥ a ⇔ b ⊥ a′

3. Hai mặt phẳng vuông góc

a) Định nghĩa: $\boxed{(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \left[P; d; Q\right] = 90^0}$

b) Tính chất

• **Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau:** $\begin{cases} (P) \supset a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$

- $\begin{cases} (P) \perp (Q), (P) \cap (Q) = c \\ a \subset (P), a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$
- $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \ni A, a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$
- $\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$

4. Chứng minh quan hệ vuông góc

a) Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Để chứng minh $d \perp a$, ta có thể sử dụng 1 trong các cách sau:

• *Chứng minh góc giữa a và d bằng 90^0.*

• *Chứng minh 2 vectơ chỉ phương của a và vuông góc với nhau.*

• *Chứng minh $d \perp b$ mà $b \,//\, a$.*

• *Chứng minh d vuông góc với (P) và (P) chứa a*

• *Sử dụng định lí ba đường vuông góc.*

• *Sử dụng các tính chất của hình học phẳng (như định lí Pi–ta–go, ...).*

b) Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Để chứng minh d ⊥ (P), ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

• *Chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a, b cắt nhau nằm trong (P).*

• *Chứng minh d vuông góc với (Q) và (Q) // (P).*

• *Chứng minh d // a và a ⊥ (P).*

• *Chứng minh $d \subset (Q)$ với $(Q) \perp (P)$ và d vuông góc với giao tuyến c của (P) và (Q).*

• *Chứng minh $d = (Q) \cap (R)$ với $(Q) \perp (P)$ và $(R) \perp (P)$.*

c) Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Để chứng minh (P) ⊥ (Q), ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

• *Chứng minh trong (P) có một đường thẳng a mà a ⊥ (Q).*

• *Chứng minh* $\left[P; d; Q\right] = 90^0$

III. Góc – Khoảng Cách

1. Góc

a) Góc giữa hai đường thẳng:

$\boxed{a//a', b//b' \Rightarrow (a, b) = (a', b')}$

Chú ý: $0^0 \le (a, b) \le 90^0$

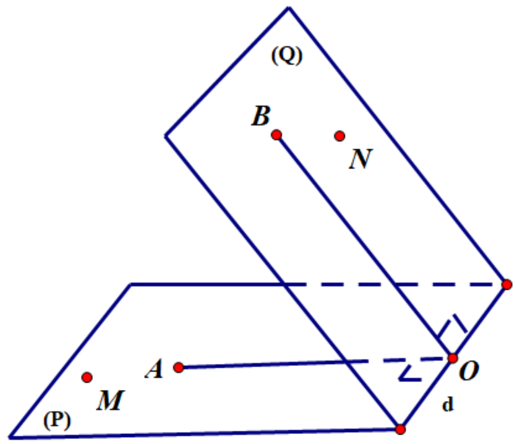
b) Góc giữa đường thẳng với mặt phẳng:

• Nếu d ⊥ (P) thì $(d, (P)) = 90^0$.

• Nếu $d \not\perp (P)$ thì $(d, (P)) = (d, d')$ với d′ là hình chiếu của d trên (P).

Chú ý: $0^0 \le (d, (P)) \le 90^0$

c) Góc nhị diện



$\left[P,d,Q\right]=\left[M,d,N\right]=AOB$

-Ta thường quy bài toán về tìm đường thẳng AB không cắt và vuông góc với d, khi đó O là hình chiếu của A hoặc B lên d

- Trong trường hợp sử dụng tọa độ hóa

Tìm H, K là hình chiếu của M,N lên d khi đó:

$\left[P,d,Q\right]=\left[M,d,N\right]=AOB=(\overrightarrow{HM};\overrightarrow{KN})$

2. Khoảng cách

a) Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng (*mặt phẳng*) *bằng độ dài đoạn vuông góc vẽ từ điểm đó đến đường thẳng (mặt phẳng).*

b) Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song *bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường thẳng đến mặt phẳng.*

c) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song *bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *bằng:*

• *Độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.*

• *Khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng với mặt phẳng chứa đường thẳng kia và song song với đường thẳng thứ nhất.*

• *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng, mà mỗi mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.*

***Chú ý**: Cho chóp S.ABC có 3 cạnh SA,SB,SC đội một vuông góc. Chiều cao SH từ S đến (ABC) được tính bởi công thức:*

$$\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}+\frac{1}{SC^2}$$

VI. Nhắc lại một số công thức hình học phẳng

1. Hệ thức lượng trong tam giác

a) Cho ΔABC vuông tại A, có đường cao AH.

- $AB^2+AC^2=BC^2$
- $AB^2=BC.BH,\ AC^2=BC.CH$
- $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$

b) Cho ΔABC có độ dài ba cạnh là: *a, b, c; độ dài các trung tuyến là* m_a, m_b, m_c*; bán kính đường tròn ngoại tiếp R; bán kính đường tròn nội tiếp r; nửa chu vi p.*

• Định lí hàm số cosin:

$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$

• Định lí hàm số sin:

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

• Công thức độ dài trung tuyến

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4};$$

2. Các công thức tính diện tích

a) Tam giác:

- $S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$
- $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca.\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$
- $S=\frac{abc}{4R}$
- $S=pr$
- $S=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$
- ΔABC vuông tại A: $2S=AB.AC=BC.AH$
- ΔABC đều, cạnh a: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b) Hình vuông: *$S = a^2$(a: cạnh hình vuông)*

c) Hình chữ nhật:*$S = a.b$(a, b: hai kích thước)*

d) Hình bình hành: $S = đáy \times cao = AB.AD.\sin BAD$

e) Hình thoi: $S = AB.AD.\sin BAD = \frac{1}{2}AC.BD$ **f)**

f) Hình thang: $S = \frac{1}{2}(a+b).h$

(a, b: hai đáy, h: chiều cao)

V. Các công thức tính thể tích:

1. Thể tích của khối lập phương, hộp chữ nhật:

Công thức tính thể tích hình lập phương: $V = a^3$ (với a là độ dài cạnh)

Công thức tính thể tích khối hình hộp chữ nhật

$\boxed{V = abc}$ với *a, b, c* là ba kích thước của khối hộp chữ nhật.

2. Thể tích của khối chóp:

$V = \frac{1}{3}S_{đáy}.h$ với $S_{đáy}$ là diện tích đáy, *h* là chiều cao của khối chóp

3. Thể tích của khối chóp cụt đều:

$V = \frac{1}{3}h.\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$

4. Thể tích của khối lăng trụ:

$V = S_{đáy}.h$ với $S_{đáy}$ là diện tích đáy, *h* là chiều cao của khối lăng trụ

5. Một số ćch tính thể tích khối đa diện

a) Tính thể tích bằng công thức

b) Tính thể tích bằng cách chia nhỏ

Ta chia khối đa diện thành nhiều khối đa diện nhỏ mà có thể dễ dàng tính được thể tích của chúng.

c) Tính thể tích bằng cách bổ sung

Ta có thể ghép thêm vào khối đa diện một khối đa diện khác sao cho khối đa diện thêm vào và khối đa diện mới tạo thành có thể dễ tính được thể tích.

6. Các hình thường gặp:

- Hình chóp là hình chóp đều nếu nó có đáy là đa giác đều, cạnh bên bằng nhau và có chân đường cao trùng với tâm của đáy.
- Hình chóp cụt là hình tạo bởi thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp và đáy.
- Hình chóp cụt đều là hình chóp cụt hình thành do cắt hình chóp đều.
- Hình tứ diện là hình chóp tam giác
- Hình tứ diện đều là hình chóp tam giác có bốn mặt là các tam giác đều.
- Hình lăng trụ là hình gồm hai đáy là hai đa giác bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song, các cạnh bên song song và bằng nhau. Tùy theo đáy của hình lăng trụ là tam giác, tứ giác ....ta có hình lăng trụ tam giác, tứ giác…
- Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.
- Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy. Độ dài cạnh bên là chiều cao của hình lăng trụ đứng.
- Tùy theo đáy của hình lăng trụ đứng là tam giác, tứ giác… ta có hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng ngũ giác…
- Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều được gọi là hình lăng trụ đều.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là hình hộp chữ nhật
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông các mặt bên đều là hình vuông được gọi là hình lập phương.

Chú ý: Đa giác đều là đa giác có các cạnh và các góc bằng nhau.

Chủ đề 12: Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

1. Hệ trục tọa độ

- $M(x,y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$
- $\vec{u}(x,y) \Leftrightarrow \vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$

2. Tọa độ véc tơ, các phép toán véc tơ

- Cho hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$
- Cho $\vec{u}(u_1;u_2), \vec{v}(v_1;v_2)$. Khi đó

$\vec{u} \pm \vec{v}(u_1 \pm u_2; v_1 \pm v_2); k\vec{u} = (ku_1; ku_2), k \in \mathbb{R}$

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$$

3. Tọa độ trung điểm, trọng tâm

- Tọa độ trung điểm I của AB, trọng tâm G của tam giác ABC được tính theo công thức.

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

4. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

- Trong mặt phẳng tọa độ cho $\vec{a} = (x_1; y_1)$ và $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Khi

$\vec{a}.\vec{b} = x_1.x_2 + y_1.y_2$

$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1.x_2 + y_1.y_2 = 0$

$$\cos(\vec{a};\vec{b}) = \frac{x_1.x_2 + y_1.y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

- Khoảng cách giữa hai điểm

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

5. Phương trình tham số của đường thẳng.

- Đường thẳng Δ qua điểm $M(x_0;y_0)$ có VTCP $\vec{u}(u_1;u_2)$ thì Δ có phương trình tham số $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (1)$
- Một số chú ý:

1.VTCP là véc tơ $\neq \vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng.

2.Nếu Δ có VTPT $\vec{n} = (a;b)$ thì Δ có VTCP $\vec{u} = (-b;a)$

3.Nếu Δ có hệ số góc k thì Δ có một VTCP $\vec{u} = (1;k)$

4.Nếu phương trình đường thẳng cho ở dạng (1) thì nó có một VTCP $\vec{u} = (u_1;u_2)$

5.Hai đường thẳng song song có cùng VTCP

6.Hai đường thẳng vuông góc thì VTPT của đường này là VTCP của đường thẳng kia.

7. PT $0x: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}; \quad 0y: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

6. Phương trình tổng quát của đường thẳng

- Phương trình Δ: ax+by+c=0 (2) đgl phương trình tổng quát của đường thẳng
- Đường thẳng Δ qua điểm $M(x_0;y_0)$ có VTPT $\vec{n} = (a;b)$ thì Δ có phương trình tổng quát $\Delta: a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$
- Một số chú ý:

1.VTPT là véc tơ $\neq \vec{0}$ và vuông góc với VTCP.

2.Nếu Δ có VTCP $\vec{u} = (a;b)$ thì Δ có VTPT $\vec{n} = (-b;a)$.

3.Nếu Δ có hệ số góc k thì Δ có một VTPT $\vec{n} = (k;-1)$

Phương trình đường thẳng Δ qua $M(x_0;y_0)$ có hệ số góc k có dạng

$y = k(x - x_0) + y_0$

4.Nếu phương trình đường thẳng cho ở dạng (2) thì nó có một VTPT $\vec{n} = (a;b)$

5.Hai đường thẳng song song có cùng VTPT. Phương trình Δ: ax+by+c=0, nếu $\Delta \parallel \Delta'$ thì phương trình Δ': ax+by+m=0, $m \neq c$

6.Hai đường thẳng vuông góc thì VTCP của đường này là VTPT của đường thẳng kia.

7. PT $0x: y = 0; \quad 0y: x = 0$

Các Trường Hợp Đặc Biệt Của Phương Trình Tổng Quát Δ: ax+by+c=0

- Khi **c=0** đường thẳng đi qua gốc tọa độ
- Khi **a=0** đường thẳng song song hoặc trùng với trục 0x
- Khi **b= 0** đường thẳng song song hoặc trùng với trục 0y
- Nếu Δ qua A(a;0) và B(0;b) với a,b

khác 0 thì phương trình d có dạng:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (PT đoạn chắn)

7. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$ và Δ_2:

$a_2x+b_2y+c_2=0$.

Toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \quad (1)$$

• Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow$ hệ (1) có một nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad (\text{nếu } a_2,b_2,c_2 \neq 0)$$

• Δ_1 // $\Delta_2 \Leftrightarrow$ hệ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2} \quad (\text{nếu } a_2,b_2,c_2 \neq 0)$$

• $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow$ hệ (1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2} \quad (\text{nếu } a_2,b_2,c_2 \neq 0)$$

8. Góc giữa hai đường thẳng

• Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau là góc không tù tạo bởi hai đường thẳng đó

+ $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) = 90^0$

+ Δ_1 // $\Delta_2 \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) = 0^0$

$$\mathbf{0^0 \leq (\Delta_1, \Delta_2) \leq 90^0}$$

• Cho Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$.

$$\cos\varphi=\left|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\right| = \frac{\left|\vec{n}_1.\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|.\left|\vec{n}_2\right|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\varphi=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}}$$

• $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

• $\mathbf{\Delta_1: y = k_1x + m_1;\ \Delta_2: y = k_2x + m_2}$

$\mathbf{\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1.k_2}=-1$

9. Khoảng các từ một điểm đến một đường thẳng

Cho Δ: ax + by + c = 0 và $M_0(x_0; y_0)$.

$$d(M;\Delta)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d(M;0x)=\left|y_0\right| \ ; \ d(M;0y)=\left|x_0\right|$$

10. *Vị trí tương đối của hai điểm đối với một đường thẳng*

Cho đường thẳng Δ: $ax+by+c=0$ và hai điểm

$M(x_M;y_M)$, $N(x_N;y_N) \notin \Delta$.

•) M, N nằm cùng phía đối với Δ

$\Leftrightarrow (ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)>0$.

•) M, N nằm khác phía đối với Δ

$\Leftrightarrow (ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)<0$.

11. Phương trình đường tròn

• Phương trình đường tròn (C) tâm I(a; b), bán kính R:

$$\mathbf{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}$$

• Phương trình đường tròn (C) tâm O(0; 0), bán kính R: $\mathbf{x^2 + y^2 = R^2}$

•Phương trình: $\mathbf{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0}$ *với* $\mathbf{a^2 + b^2 - c > 0}$ *là phương trình đường tròn tâm I(a; b), bán kính R =* $\sqrt{a^2+b^2-c}$.

• Cho (C) có tâm I(a; b), M(x₀; y₀) ∈ (C). Phương trình tiếp tuyến với (C) tại

$M_0(x_0; y_0)$: $\mathbf{(x_0-a)(x-x_0) + (y_0-b)(y-y_0)=0}$

• Nhận xét : Δ là tiếp tuyến của (C)

$\mathbf{\Leftrightarrow d(I, \Delta) = R}$

12. Phương trình Elip

12.1 Định nghĩa

Cho F_1, F_2 cố định với $F_1F_2=2c$ $(c > 0)$.

$$M \in (E) \Leftrightarrow MF_1+MF_2=2a \quad (a>c)$$

*F_1, F_2: các **tiêu điểm**,* $F_1F_2=2c$ *: **tiêu cự**.*

12.2 Phương trình chính tắc của elip

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0,\ b^2=a^2-c^2)$$

• Toạ độ các tiêu điểm: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

• Với M(*x; y*) ∈ (E), MF_1, MF_2 đgl các **bán kính**

qua tiêu điểm của M.

$MF_1 = a + ex,\ MF_2 = a - ex$,với $e = \frac{c}{a}$

12.3 Hình dạng của elip

- (E) nhận các trục toạ độ làm các trục đối xứng và gốc toạ độ làm tâm đối xứng.
- Toạ độ các đỉnh:

$A_1(-a;0),\ A_2(a;0),\ B_1(0;-b),\ B_2(0;b)$

- Độ dài các trục:

trục lớn: $A_1A_2 = 2a$,trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$

- **Tâm sai** của (E): $e = \frac{c}{a}$ (0 < e < 1)
- Hình chữ nhật cơ sở: tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a,\ y = \pm b$ (ngoại tiếp elip).

12.4 Đường chuẩn của elip

- Phương trình các đường chuẩn Δ_i ứng với các tiêu điểm F_i là: $x \pm \frac{a}{e} = 0$
- Với M ∈ (E) ta có:

$$\frac{MF_1}{d(M,\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M,\Delta_2)} = e\ (e < 1)$$

13. Phương trình Hypebol

13.1. Định nghĩa

Cho F_1, F_2 cố định với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$.

$M \in (H) \Leftrightarrow |MF_1 - MF_2| = 2a \qquad (a < c)$

*F_1, F_2: các **tiêu điểm**, $F_1F_2 = 2c$: **tiêu cự**.*

13.2. Phương trình chính tắc của hypebol

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a,b > 0,\ b^2 = c^2 - a^2)$$

- Toạ độ các tiêu điểm: $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$.
- Với M(x; y) ∈ (H), MF_1, MF_2 đgl các **bán kính qua tiêu điểm** của M.

$MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|,\ MF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$, với $e = \frac{c}{a}$

13.3. Hình dạng của hypebol

- (H) nhận các trục toạ độ làm các trục đối xứng và gốc toạ độ làm tâm đối xứng.
- Toạ độ các đỉnh: $A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$

$B_1(0;-b); B_2(0;b)$

- Độ dài các trục:

trục thực: $A_1A_2 = 2a$, trục ảo: $B_1B_2 = 2b$

- **Tâm sai** của (H): $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$
- Hình chữ nhật cơ sở: tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a,\ y = \pm b$.
- Phương trình các đường tiệm cận: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

13.4. Đường chuẩn của hypebol

- Phương trình các đường chuẩn Δ_i ứng với các tiêu điểm F_i là: $x \pm \frac{a}{e} = 0$
- Với M ∈ (H) ta có:

$$\frac{MF_1}{d(M,\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M,\Delta_2)} = e\ (e < 1)$$

14. Phương trình Parabol

14.1. Định nghĩa

Cho điểm F và đường thẳng Δ không đi qua F.

$$M \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M,\Delta)$$

F: **tiêu điểm**, Δ: **đường chuẩn**,

$p = d(F,\Delta)$: **tham số tiêu**.

14.2. Phương trình chính tắc của parabol

$$y^2 = 2px \qquad (p > 0)$$

- Toạ độ tiêu điểm: $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.
- Phương trình đường chuẩn: Δ: $x + \frac{p}{2} = 0$.
- Với M(x; y) ∈ (P), **bán kính qua tiêu điểm** của M là $MF = x + \frac{p}{2}$.

15.4. Hình dạng của parabol

- (P) nằm về phía bên phải của trục tung.
- (P) nhận trục hoành làm trục đối xứng.
- Toạ độ đỉnh: $O(0;0)$
- Tâm sai: $e = 1$.

Mục Lục