SỞ GD&ĐT | **KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I. NĂM HỌC 2024-2025**

TRƯỜNG THPT | **Môn: TOÁN 12**

HƯỚNG DẪN GIẢI | *Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề*

(Đề có trang)

Họ, tên thí sinh:...

Số báo danh:..

ĐỀ SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực trị là điểm $A(2; -2)$. Tính $a + 2b$.

A. $a + 2b = 4$. **B.** $a + 2b = 2$. **C.** $a + 2b = -4$. **D.** $a + 2b = -2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; +\infty)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(-\infty; 1)$.

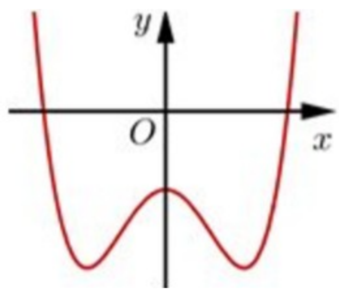
Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ trên đoạn $[-1; 3]$.

A. 9. **B.** 19. **C.** 25. **D.** 0.

Câu 4: Tìm các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{7x+2}$.

A. $y = \frac{3}{7}; x = -\frac{2}{7}$. **B.** $y = -\frac{3}{7}; x = -\frac{2}{7}$. **C.** $y = \frac{3}{7}; x = \frac{2}{7}$. **D.** $y = -\frac{1}{2}; x = -\frac{2}{7}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Xác định dấu của a, b, c.



A. $a < 0, b < 0, c < 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c < 0$. **C.** $a > 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c > 0$.

Câu 7: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây đúng

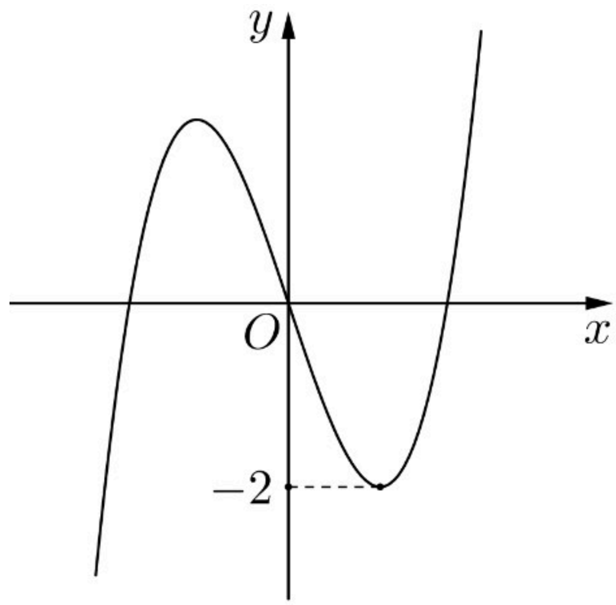
A. $\vec{AO} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$ **B.** $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$

C. $\vec{AO} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$ **D.** $\vec{AO} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$

Câu 8: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 3$ khi

A. $m = \frac{1}{2}$. **B.** $m = \frac{3}{2}$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 1$.

Câu 9: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới. Phương trình $f(x^2) + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 0. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 10: Cho x, y là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \le 0 \end{cases}$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^4 - m$ có ba điểm cực trị đều thuộc các trục toạ độ

A. $m = 2$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = \frac{1}{2}$. **D.** $m = 1$.

Câu 12: Cho tứ diện đều ABCD, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó cos(AB,DM) bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý I, II, III, IV ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$

(I) Hàm số nghịch biến trên R

(II) Hàm số đồng biến trên R

(III) Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$

(IV) Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên $(1;+\infty)$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{5}{x-1}$, khi đó:

(I) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

(II) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$

(III) Giao điểm của hai tiệm cận đồ thị nằm trên trục hoành

(IV) Giao điểm của hai tiệm cận đồ thị là đỉnh parabol $y=x^2-2x+1$

Câu 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm MN

(I) $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GD}=\vec{0}$

(II) $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}=4\vec{MG}$

(III) $\vec{MN}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{CD})$

(IV) $2\vec{MN}=\vec{AC}+\vec{BD}$

Câu 4: Cho hàm số (C): $y=f(x)=\frac{2x^2+3x-5}{x+3}$ biết đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng Δ: $y=ax+b$, khi đó:

(I) Giao điểm của Δ của trục Ox có hoành độ lớn hơn 2

(II) Giao điểm của Δ và tiệm cận đứng của (C) có tọa độ là $(-3;-9)$

(III) Gọi A=Δ∩Ox, B=Δ∩Oy ta có $S_{OAB}>3$

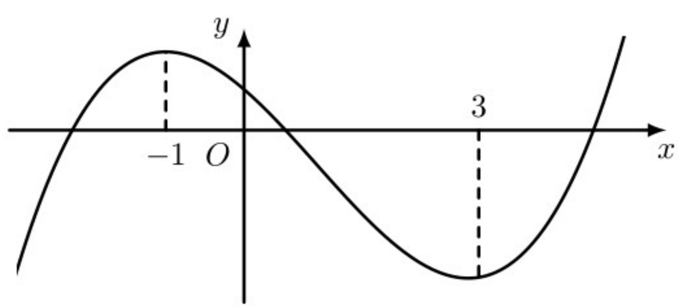
(IV) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=ax+b$ trên $[0;3]$ là 4.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2mx^2+(m+3)x-5+m$ đồng biến trên R

Câu 2: Cho tứ diện ABCD có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD và AC sao cho BC=4BM, AC=3AP, BD=2BN. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$

Câu 3: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left((x-1)^2+m\right)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là

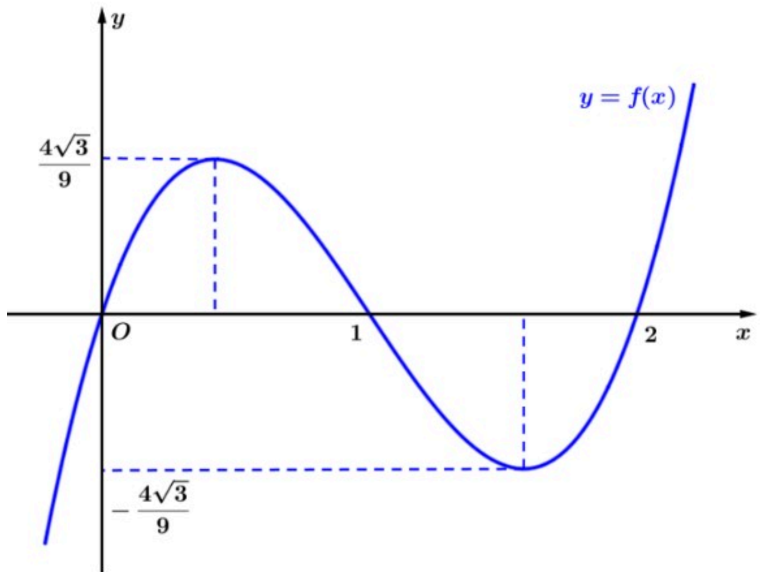
Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\frac{x+2m}{x+2}$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[1;3]}|f(x)|+\min\limits_{[1;3]}|f(x)|=2$. Số phần tử của S bằng

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f^2\left(x\right)-m}$ có tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng bằng 3.

Câu 6: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên:



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-\left|x^2-1\right|\right|\right)=\dfrac{1}{2021}$ là

SỞ GD&ĐT	**KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I. NĂM HỌC 2024-2025**
TRƯỜNG THPT	**Môn: TOÁN 12**
HƯỚNG DẪN GIẢI	*Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề*
(Đề có trang)	

Họ, tên thí sinh:..

Số báo danh:.. **ĐỀ SỐ 02**

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực trị là điểm $A(2; -2)$. Tính $a + 2b$.

*__A.__ $a + 2b = 4$. **B.** $a + 2b = 2$. **C.** $a + 2b = -4$. **D.** $a + 2b = -2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; +\infty)$. **B.** $(1; +\infty)$. ***C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ trên đoạn $[-1; 3]$.

A. 9. **B.** 19. ***C.** 25. **D.** 0.

Lời giải

$y = x^4 - 8x^2 + 16 \Rightarrow y' = 4x^3 - 16x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \notin [-1; 3] \end{array}\right.$

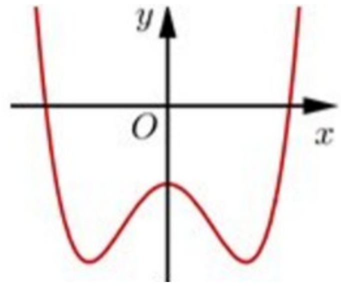
$y(-1) = 9; y(2) = 0; y(3) = 25$.

Vậy $\max\limits_{[-1;3]} y = 25$

Câu 4: Tìm các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{7x+2}$.

*__A.__ $y = \frac{3}{7}; x = -\frac{2}{7}$. **B.** $y = -\frac{3}{7}; x = -\frac{2}{7}$. **C.** $y = \frac{3}{7}; x = \frac{2}{7}$. **D.** $y = -\frac{1}{2}; x = -\frac{2}{7}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Xác định dấu của a, b, c.



A. $a < 0, b < 0, c < 0$. *__B.__ $a > 0, b < 0, c < 0$. **C.** $a > 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c > 0$.

Lời giải

Khi x dần về $+\infty$ thì đồ thị đi lên nên $a > 0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị nên $a.b < 0$. Suy ra $b < 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Câu 7: Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây đúng

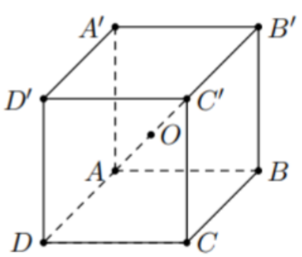
A. $\vec{AO} = \frac{1}{3}\left(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}\right)$

B. $\vec{AO} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}\right)$

C. $\vec{AO} = \frac{1}{4}\left(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}\right)$

D. $\vec{AO} = \frac{2}{3}\left(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}\right)$

Hướng dẫn giải



$\vec{AC'} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}$

+ O là trung điểm AC’ $\rightarrow \vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AC'} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}\right)$

Câu 8: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 3$ khi

A. $m = \frac{1}{2}$. *__B.__ $m = \frac{3}{2}$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$

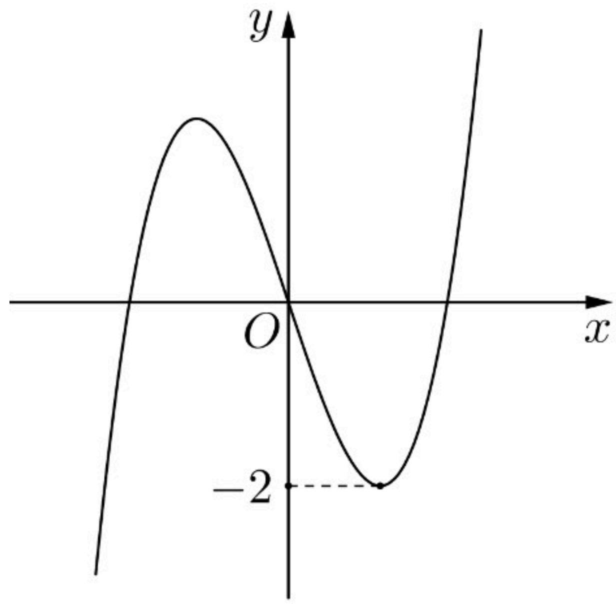
Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x + m,\ (a = 3, b = -6, c = m, \Delta = 36 - 12m)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

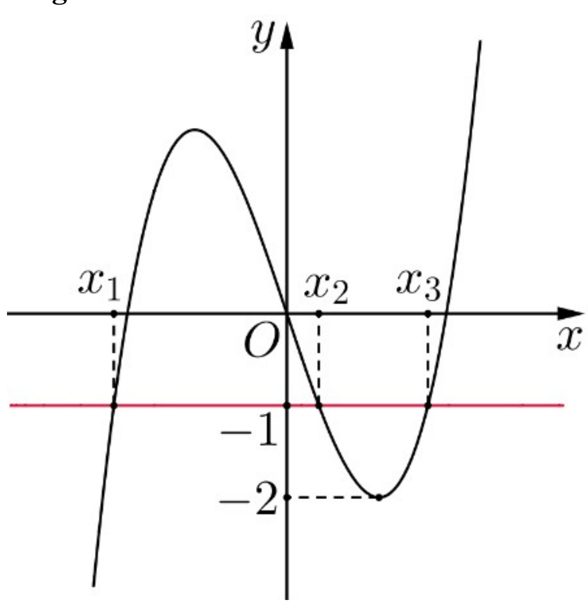
Theo đề bài $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow 4 - \frac{2}{3}m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$. (nhận)

Câu 9: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới. Phương trình $f(x^2) + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 0. **B.** 3. ***C.** 4. **D.** 2.

Lời giải



Từ đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ suy ra $f(x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{array}\right.$ với $x_1 < 0 < x_2 < x_3$

Ta có: $f\left(x^2\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(x^2\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2=x_1 & (1) \\ x^2=x_2 & (2) \\ x^2=x_3 & (3) \end{array}\right.$

Vì $x_1<0<x_2<x_3$ nên phương trình (1) vô nghiệm; mỗi phương trình (2) và (3) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f\left(x^2\right)+1=0$ có 4 nghiệm.

Câu 10: Cho x, y là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\begin{cases} x^2-xy+3=0 \\ 2x+3y-14\le 0 \end{cases}$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x$ thuộc khoảng nào sau đây?

*A. $(-2;2)$. B. $(-\infty;-1)$. C. $(1;3)$. D. $(0;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $x^2-xy+3=0 \Rightarrow y=\dfrac{x^2+3}{x}$ thay vào $2x+3y-14\le 0$ ta có bất phương trình

$2x+3\dfrac{x^2+3}{x}-14\le 0 \Leftrightarrow 1\le x\le \dfrac{9}{5}$. Thay $y=\dfrac{x^2+3}{x}$ vào $P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x$ ta có

$P=3x^2\dfrac{x^2+3}{x}-x\left(\dfrac{x^2+3}{x}\right)^2-2x^3+2x=3x\left(x^2+3\right)-\dfrac{x^4+6x^2+9}{x}-2x^3+2x=\dfrac{5x^2-9}{x}$.

$P'=\dfrac{5x^2+9}{x^2}>0, \forall x\in\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$. Suy ra $P=\dfrac{5x^2-9}{x}$ đồng biến trên $\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$.

Vậy $\underset{\left[1;\frac{9}{5}\right]}{Max}\,P=P\left(\dfrac{9}{5}\right)=4; \underset{\left[1;\frac{9}{5}\right]}{Min}\,P=P(1)=-4$. Suy ra $\underset{\left[1;\frac{9}{5}\right]}{Max}\,P+\underset{\left[1;\frac{9}{5}\right]}{Min}\,P=0$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m^4-m$ có ba điểm cực trị đều thuộc các trục toạ độ

A. $m=2$. B. $m=3$. C. $m=\dfrac{1}{2}$. *D. $m=1$.

Lời giải

Ta có $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$.

Xét $y'=0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị thì $m>0$.

Khi đó toạ độ các điểm cực trị là $A\left(0;2m^4-m\right), B\left(\sqrt{m};2m^4-m^2-m\right), C\left(-\sqrt{m};2m^4-m^2-m\right)$.

Ta có $A\in Oy$. Để $B, C\in Ox$ thì $2m^4-m^2-m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ 2m^3-m-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Do $m > 0$ nên ta được $m = 1$.

Câu 12: Cho tứ diện đều ABCD, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó cos(AB,DM) bằng:

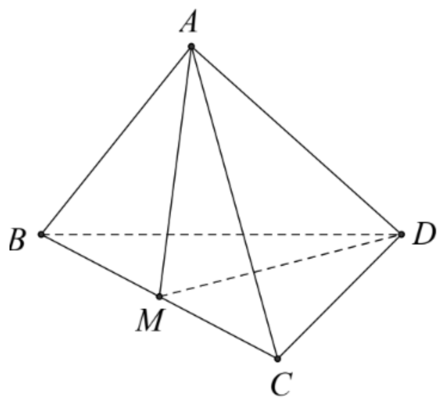
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải



Giả sử cạnh của tứ diện là a

Ta có $\cos(\vec{AB}, \vec{DM})=\frac{\vec{AB}.\vec{DM}}{|\vec{AB}|.|\vec{DM}|}$

Mặt khác $\vec{AB}.\vec{DM} = \vec{AB}\left(\vec{AM} - \vec{AD}\right) = \vec{AB}.\vec{AM} - \vec{AB}.\vec{AD}$= AB.AM.cos 30^0−AB.AD.cos60^0=$\frac{a^2}{4}$

Do đó $\cos(\vec{AB}, \vec{DM})= \frac{\sqrt{3}}{6}$

Câu 1: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$

(I) Hàm số nghịch biến trên R

(II) Hàm số đồng biến trên R

(III) Hàm số đồng biến trên (1;+∞) và nghịch biến trên (−∞;1)

(IV) Hàm số đồng biến trên (−∞;1) và nghịch biến trên (1;+∞)

Hướng dẫn giải

y'≤0, $\forall x \in$R nên hàm số nghịch biến trên R

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{5}{x-1}$, khi đó:

(I) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

(II) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng x=1

(III) Giao điểm của hai tiệm cận đồ thị nằm trên trục hoành

(IV) Giao điểm của hai tiệm cận đồ thị là đỉnh parabol $y=x^2-2x+1$

Hướng dẫn giải

(I) S (II) Đ (III) Đ (IV) Đ

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là 2 đường thẳng $x=1$, $y=0$

Giao điểm 2 đường tiệm cận là điểm $I(1;0)\in Ox$ và cũng là đỉnh parabol $y=x^2-2x+1$

Câu 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm MN

(I) $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GD}=\vec{0}$

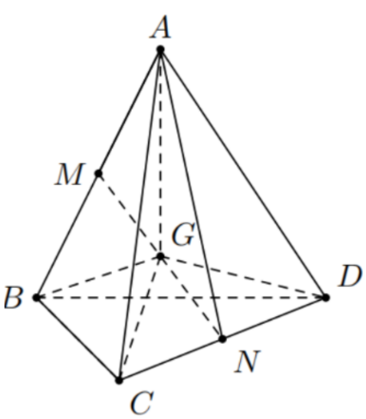
(II) $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}=4\vec{MG}$

(III) $\vec{MN}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{CD})$

(IV) $2\vec{MN}=\vec{AC}+\vec{BD}$

Hướng dẫn giải

(I) Đ (II) Đ (III) S (IV) Đ



Vì M, N lần lượt là trung điểm AB, CD$\rightarrow\begin{cases}\vec{GA}+\vec{GB}=2\vec{GM}\\ \vec{GC}+\vec{GD}=2\vec{GN}\end{cases}$

G là trung điểm MN$\rightarrow\vec{GM}+\vec{GN}=\vec{0}\leftrightarrow\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GD}=\vec{0}$. Vậy (I) đúng

Khi đó $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}=4\vec{MG}+\left(\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GD}\right)=4\vec{MG}$. Vậy (II) đúng

Dễ chứng minh được $\vec{MN}=\frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{BC})$ nên (III) sai

Ta có:

$\vec{MN}=\vec{MA}+\vec{AC}+\vec{CN}$

$\vec{MN}=\vec{MB}+\vec{BD}+\vec{DN}$

Do đó $2\vec{MN}=\vec{AC}+\vec{BD}$. Vậy (IV) đúng

Câu 4: Cho hàm số (C): $y=f(x)=\frac{2x^2+3x-5}{x+3}$ biết đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng Δ: $y=ax+b$, khi đó:

(I) Giao điểm của Δ của trục Ox có hoành độ lớn hơn 2

(II) Giao điểm của Δ và tiệm cận đứng của (C) có tọa độ là $(-3;-9)$

(III) Gọi $A=\Delta\cap Ox$, $B=\Delta\cap Oy$ ta có $S_{OAB}>3$

(IV) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=ax+b$ trên $[0;3]$ là 4.

Hướng dẫn giải

(I) S (II) Đ (III) S (IV) S

Ta có $\frac{f(x)}{x} = 2$ và $f(x) - 2x = -3$ => TCX: $y=2x-3$

+Δ∩Ox =>y=0 ⇔$2x-3=0$⇔$x=\frac{3}{2}<2$ nên (I) SAI

+TCD $x=-3$ với $x0=-3$ =>y0=2.(−3) −3=−9 vậy (II) ĐÚNG

+ A=Δ∩Ox =>A(−3;0) và B=Δ∩Ox => B(0;$\frac{3}{2}$) => $SOAB=\frac{9}{4} < 3$ nên (III) SAI

+$y=2x-3$ đồng biến trên R suy ra GTLN trên [0;3] là 3 vậy (IV) SAI

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m + 3)x - 5 + m$ đồng biến trên R

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN 2

Ta có tập xác định D=R

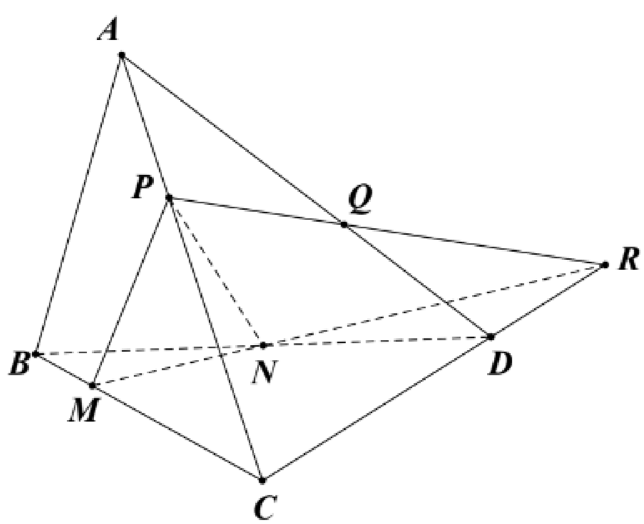
y'=0 ⇔ $x^2 - 4mx + m + 3 = 0$

Hàm số đồng biến trên R khi và chỉ khi $y'\geq 0, \forall x\in R$, đẳng thức chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm

⇔Δ'≤0 ⇔$(-2m)^2-(m+3)\leq 0$ ⇔$-\frac{3}{4}\leq m\leq 1$

Câu 2: Cho tứ diện ABCD có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD và AC sao cho BC=4BM, AC=3AP, BD=2BN. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$

Hướng dẫn giải



Đặt $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}, \vec{AD} = \vec{c}, \vec{AQ} = k\,\vec{AD} = k\vec{c}$

Theo đề bài, ta có $\vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}; \vec{AN} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c}\right)$;

$\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{b}$

Ta có

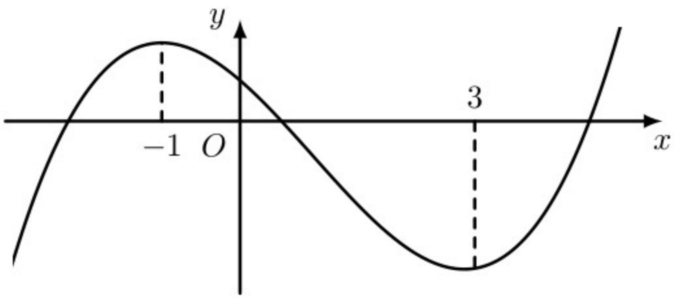
$\{\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\ \vec{MP} = \vec{AP} - \vec{AM} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b}\ \vec{MQ} = \vec{AQ} - \vec{AM} = -\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + k\vec{c}$

Vì M, N, P, Q đồng phẳng nên

$x\vec{MN} + y\vec{MP} = \vec{MQ}$ ⇔$\{0,25x + 0,75y = 0,75\ 0,25x - \frac{1}{12}y = 0,25\ 0,5x = k$ ⇔$\{x = \frac{6}{5}\ y = \frac{3}{5}\ k = \frac{3}{5}$

Vậy $\vec{AQ} = \frac{3}{5}\vec{AD}$

Câu 3: Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left((x-1)^2+m\right)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là

Xét hàm số

$y=f\left((x-1)^2+m\right)$

• $y'=2(x-1)f'\left((x-1)^2+m\right)$

• $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\(x-1)^2+m=-1\\(x-1)^2+m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\(x-1)^2=-1-m\\(x-1)^2=3-m\end{array}\right.$

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì $-1-m\le 0<3-m\Leftrightarrow -1\le m<3\Rightarrow m\in\{-1;0;1;2\}$

Vậy tổng các phần tử của S là 2.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+2m}{x+2}$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[1;3]}|f(x)|+\min\limits_{[1;3]}|f(x)|=2$. Số phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 0. ***C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $f'(x)=\dfrac{2-2m}{(x+2)^2},\forall x\ne -2$.

Nếu $m=1\Rightarrow f(x)=1,\forall x\ne -2$, khi đó $\max\limits_{[1;3]}|f(x)|=\min\limits_{[1;3]}|f(x)|=1$

$=\left|\dfrac{1+2m}{3}\right|+\left|\dfrac{3+2m}{5}\right|$.

Nếu $m\ne 1$ ta có $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên đoạn $[1;3]$, $f(1)=\dfrac{1+2m}{3},f(3)=\dfrac{3+2m}{5}$.

+) Nếu $f(1).f(3) \le 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le m \le -\frac{1}{2}$ thì $\min\limits_{[1;3]}|f(x)| = 0, \max\limits_{[1;3]}|f(x)| = f(1)$ hoặc $\max\limits_{[1;3]}|f(x)| = f(3)$. Do đó $\max\limits_{[1;3]}|f(x)| + \min\limits_{[1;3]}|f(x)| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\frac{1+2m}{3}\right| = 2 \\ \left|\frac{3+2m}{5}\right| = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{5}{2}, m = -\frac{7}{2} \\ m = \frac{7}{2}, m = -\frac{13}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện xét thì không có giá trị m.

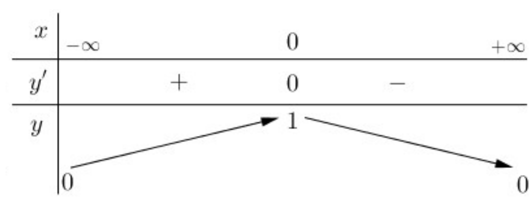
+) Nếu $f(1).f(3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > -\frac{1}{2} \\ m < -\frac{3}{2} \end{array}\right.$ thì $\min\limits_{[1;3]}|f(x)| + \max\limits_{[1;3]}|f(x)| = |f(1)| + |f(3)| = \left|\frac{1+2m}{3}\right| + \left|\frac{3+2m}{5}\right|$. Do đó $\max\limits_{[1;3]}|f(x)| + \min\limits_{[1;3]}|f(x)| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1+2m}{3}\right| + \left|\frac{3+2m}{5}\right| = 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m < -\frac{3}{2} \\ \frac{1+2m}{3} + \frac{3+2m}{5} = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ \frac{1+2m}{3} + \frac{3+2m}{5} = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\frac{11}{4} \\ m = 1 \text{ (lo¹i do } m \neq 1) \end{array}\right.$$

.

Vậy S có hai phần tử $m = 1, m = -\frac{11}{4}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.



Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x) - m}$ có tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng bằng 3. Chọn kết quả đúng.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{f^2(x) - m} = \frac{1}{-m}$ vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Do đó:

Nếu $m = 0$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x) - m}$ không có tiệm cận ngang.

Mặt khác phương trình $f^2(x) - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Nếu $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f^2(x)-m}$ có một tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{-m}$.

+ $m<0$: Phương trình $f^2(x)-m=0$ vô nghiệm vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

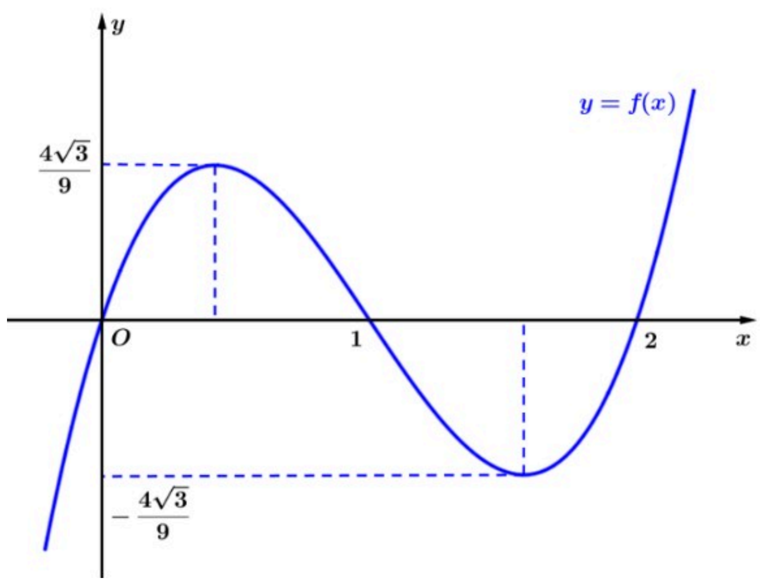
+ $m>0$: $f^2(x)-m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{m} \\ f(x)=-\sqrt{m} \end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=-\sqrt{m}$ vô nghiệm với $\forall m>0$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $f(x)=\sqrt{m}$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0<m<1$.

Vậy $0<m<1$ thì đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f^2(x)-m}$ có 3 tiệm cận.

Câu 6: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-\left|x^2-1\right|\right|\right)=\dfrac{1}{2021}$ là



Lời giải

$y=g(x)=f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-\left|x^2-1\right|\right|\right)$ với $g(x)=\dfrac{1}{2021}$

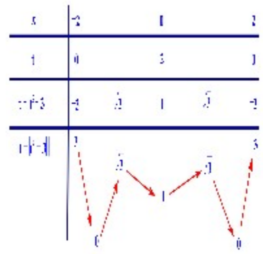
Ta đặt: $t=\sqrt{4-x^2}, \forall x \in[-2;2]$ thì suy ra $y=g(t)=f\left(\left|t-\left|t^2-3\right|\right|\right), \forall t \in[0;2]$

Suy ra: $h(t)=t-\left|t^2-3\right|=\begin{cases} t^2+t-3, t \in\left[0;\sqrt{3}\right] \\ -t^2+t+3, t \in\left[\sqrt{3};2\right] \end{cases}$.

Từ đó ta có BBT của hàm số $h(t)$ như hình vẽ bên:

t	0		$\sqrt{3}$		2
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	-3	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	1

Đặt $u=\left|t-\left|t^2-3\right|\right|$ thì ta cũng có BBT của u như sau:



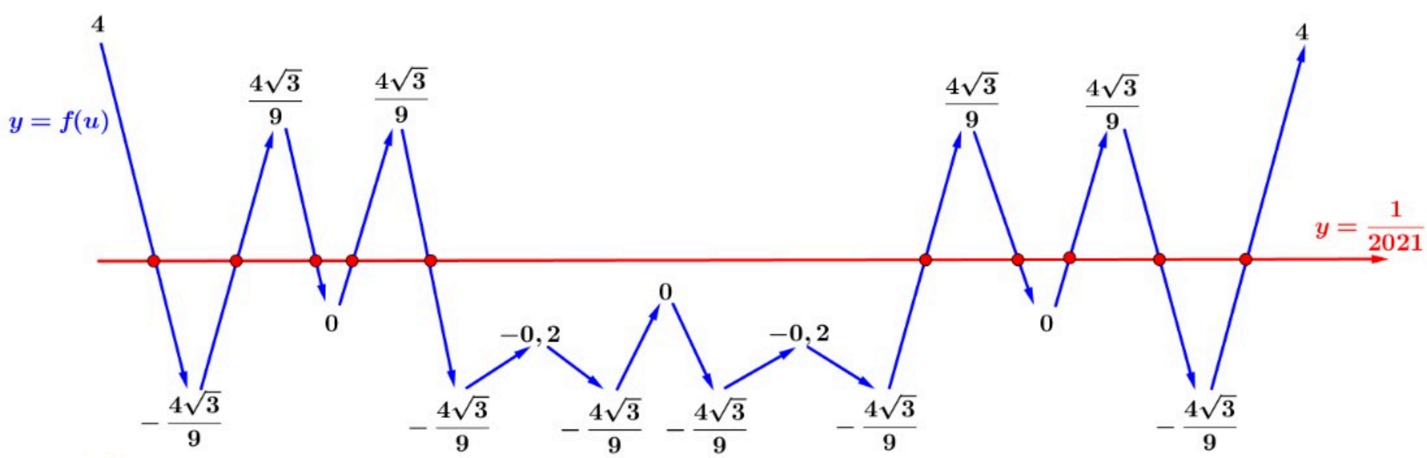
Nhìn vào đồ thị $y=f(x)$ trên ta có được:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=ax^3+bx^2+cx, a\neq 0 \\ f(1)=f(2)=0, f''(1)=0 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{2}{3}>0$$

Như vậy ta suy ra $f(x)=\frac{2}{3}x(x-1)(x-2)$. Mà hàm số đó có cực trị bằng $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$ tại $x=x_0$ nên suy ra $f(x_0)=\frac{-4\sqrt{3}}{9}\Rightarrow x_0=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

Như vậy: $f(3)=4, f\left(\sqrt{3}\right)=-0,2, f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{-4\sqrt{3}}{9}$

Từ đó, ta phác họa được đồ thị $y=f(u)$ với $u=\left|t-\left|t^2-3\right|\right|$ như sau:



Dựa vào hình vẽ trên, ta kết luận phương trình $g(x)=\frac{1}{2021}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.